ВВЕДЕНИЕ

Общие теоремы динамики часто оказываются единственными источниками информации о движении механической системы, так как проинтегрировать дифференциальные уравнения движения системы не удаётся. Задача об интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки, представляющая даже в случае одной точки некоторые трудности, становится подчас непосильной, когда приходится иметь дело с движением механической системы. Силы, приложенные к отдельным точкам системы, могут зависеть от положения и движения остальных точек системы, так что правые части дифференциальных уравнений, написанных для каждой точки в отдельности, будут содержать время, координаты и проекции скорости *всех точек* системы. В результате вопрос сводится к интегрированию *системы* дифференциальных уравнений, что далеко не просто.

Если по существу поставленной задачи необходимо изучить движение каждой точки системы в отдельности, то полное интегрирование уравнений движения системы точек, приводящее к определению координат точек системы в зависимости от времени, неизбежно. Таковы, например, задачи о движении двух, трех или нескольких тяготеющих друг к другу тел в небесной механике. В некоторых задачах достаточно бывает определить изменение некоторых суммарных мер движения системы в целом, т.е. *динамически мер движения системы* (количества движения, кинетического момента относительно какого-либо центра или оси кинетической энергии) в зависимости от *суммарных мер действия сил* (главный вектор и главный момент приложенных сил, работа сил, потенциальная энергия).

Такого рода соотношения между изменениями во времени суммарных мер движения системы материальных точек и суммарными мерами действия приложенных к точкам совокупности сил выражают *общие теоремы динамики механической системы,* применяемые как для отдельных точек и их систем, так и для сплошных сред.

Общие теоремы динамики могут быть выведены из дифференциальных уравнений движения как в дифференциальной, так и в конечной (интегральной) формах.

К числу общих теорем динамики относятся: теоремы об изменении количества движения с ее модификациями – теоремой импульсов и теоремой о движении центра масс, теорема об изменении момента количеств движения, сводящаяся в частном случае центральных сил к теореме площадей, а также теорема об изменении кинетической энергии (теорема живых сил), при консервативности сил выражающая закон сохранения механической энергии.

С помощью общих теорем динамики можно получить лишь некоторые, наиболее общие сведения о движении механической системы в целом. Исчерпывающие сведения о движении каждой точки может дать только полное интегрирование дифференциальных уравнений движения системы.

В основу вывода первых двух общих теорем динамики – *количества движения и момента количества движения* – положены основные свойства внутренних сил взаимодействия между точками системы, а именно то, что главные вектор и момент внутренних сил относительно любого центра равны нулю. Следовательно, внутренние силы в своей совокупности не могут влиять на изменение таких динамических мер, как количество движения и кинетический момент механической системы.

Третья теорема устанавливает связь между изменением кинетической энергии системы и мерой действия сил на протяжении путей движения точек системы – *работой* сил; для широкого класса сил, носящих наименование *консервативных,* работа может быть выражена как изменение потенциальной энергии. Таким образом, в круг вопросов механики вводится понятие *энергии.* Значение этого понятия состоит в том, что им определяется единая физическая величина, проявляющаяся в различных физических явлениях и, таким образом, связывающая их между собой. Понятие энергии объединяет механику с термодинамикой, с учением об электрических явлениях и т. п. Преобразование механической энергии в другие формы энергии и обратное преобразование этих форм в механическую энергию представляет важную задачу современной техники.

В отличие от изменения количества движения и момента количества движения изменение кинетической энергии материальной системы зависит от работы как внешних, так и внутренних сил. Однако и в этом случае выделение класса внутренних сил оказывается полезным, так как, например, в случае движения абсолютно твердого тела или системы абсолютно твердых тел работа внутренних сил равна нулю, а в случае сплошной среды она позволяет судить о потерях механической энергии за счет внутреннего трения.

Применением общих теорем динамики можно удовольствоваться лишь при изучении наиболее простых движений систем или при рассмотрении лишь какой-либо одной стороны сложных движений. Исчерпывающие сведения о движении системы может дать только полное интегрирование дифференциальных уравнений ее движения.

1. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Количество движения есть первая, векторная, мера механического движения. Для материальной точки массы m, движущейся в пространстве $Oxyz$ со скоростью $\overline{v}$, **количество движения точки есть вектор, равный произведению массы точки на её скорость** (рис. 1.1):

$$\overline{q} = m\overline{v}.$$

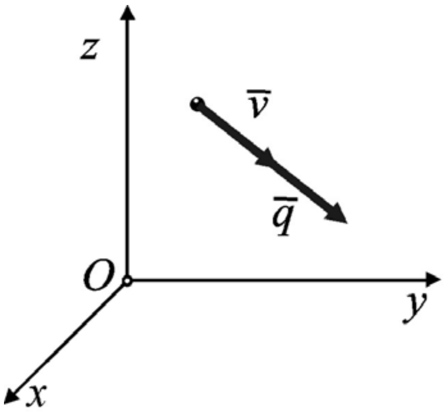

Рис. 1.1

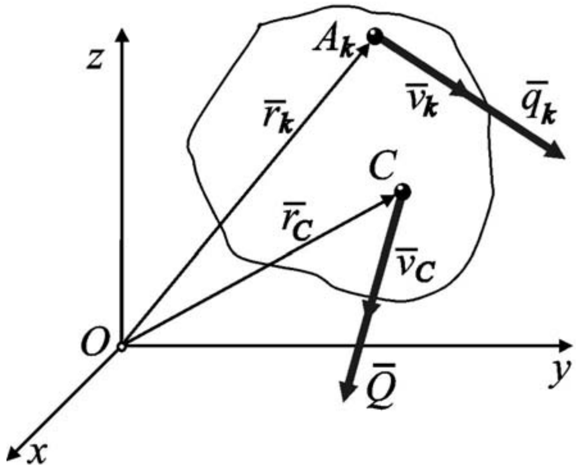

Рис. 1.2

Проекции количества движения на координатные оси соответственно равны:

$$q_x = m v_x = m\dot{x}, \quad q_y = m v_y = m\dot{y}, \quad q_z = m v_z = m\dot{z}.$$

Рассмотрим движение механической системы $\{A_k\}_n$ материальных точек в пространстве $Oxyz$.

Пусть точка A_k, радиус-вектор которой $\overline{r}_k$ и масса m_k, движется со скоростью $\overline{v}_k$. Количество движения этой точки $\overline{q}_k = m\overline{v}_k$ (рис. 1.2).

Количеством движения механической системы называют сумму количеств движений точек системы:

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} \overline{q}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{v}_k .$$

Вектор $\overline{Q}$ называют также *главным вектором количеств движения точек механической системы.*

Проекции количества движения $\overline{Q}$ на оси прямоугольной декартовой системы координат имеют вид

$$Q_x = \sum_{k=1}^{n} m_k v_{kx} = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_k \, , \; Q_y = \sum_{k=1}^{n} m_k v_{ky} = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{y}_k \, , \; Q_z = \sum_{k=1}^{n} m_k v_{kz} = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{z}_k \, .$$

Размерность количества движения $[Q] = \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Поскольку скорость центра масс механической системы равна

$$\overline{v}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{v}_k}{M}, \quad \text{то} \quad M\,\overline{v}_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{v}_k \, ,$$

где $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ – масса системы.

Получаем

$$\overline{Q} = M\,\overline{v}_c \, . \tag{1.1}$$

Количество движения механической системы равно произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Проекции вектора количества движения системы на оси прямоугольной декартовой системы координат соответственно:

$$Q_x = M\,v_{Cx}; \quad Q_y = M\,v_{Cy}; \quad Q_z = M\,v_{Cz}. \tag{1.2}$$

Количество движения твердого тела может быть найдено по тем же формулам (1.1), (1.2), как для механической системы.

2. ТЕОРЕМЫ О КОЛИЧЕСТВЕ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из $\{A_k\}_n$ материальных точек в инерциальной системе отсчета $Oxyz$. Силы, действующие на точки системы, разделим на внешние $\{\overline{F}_k^e\}_n$ и внутренние $\{\overline{F}_k^i\}_n$. Пусть точка A_k массой m_k движется под действием силы $\overline{F}_k^e$, являющейся равнодействующей внешних сил, действующих на данную точку, и $\overline{F}_k^i$, являющейся равнодействующей внутренних сил, действующих на данную точку, $\overline{a}_k$ – ускорение точки.

В соответствии с основным законом динамики точки можем записать

$$m_k\overline{a}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i,$$

или

$$m_k \frac{d\,\overline{v}_k}{dt} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i.$$

Если массы отдельных точек системы остаются постоянными, то последнее выражение можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(m_k\overline{v}_k\right) = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i,$$

или

$$\frac{d\overline{q}_k}{dt} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i. \qquad (2.1)$$

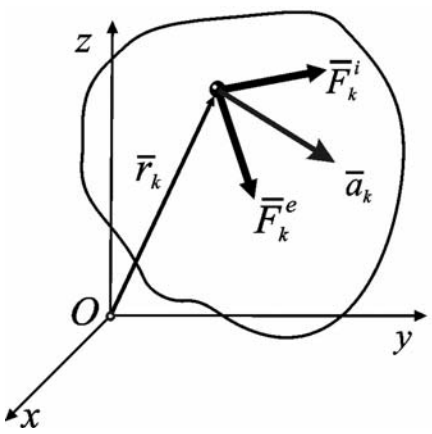

Рис. 2.1

Уравнение (2.1) выражает *теорему о количестве движения для точки в дифференциальной форме*: **производная по времени от количества движения точки равна сумме сил, действующих на точку.**

Записывая выражения (2.1) для всех точек системы и суммируя их, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d\overline{q}_k}{dt} = \frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^i.$$

Здесь $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F}_k^e = \overline{U}^e$ – главный вектор внешних сил системы,

$\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F}_k^i = 0$, так как внутренние силы системы попарно равны и противоположны.

В итоге получаем

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{U}^e. \qquad (2.2)$$

Это *теорема о количестве движения механической системы в дифференциальной форме*: **производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на точки системы.**

Проецируя (2.2) на оси неподвижной системы координат, получим:

$$\frac{dQ_x}{dt} = U_x^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = U_y^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = U_z^e.$$

Производные по времени от проекций количества движения механической системы на оси координат равны проекциям на те же оси главного вектора внешних сил, действующих на точки системы.

Если масса всей системы $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ остается постоянной, то выражение (2.2) можно представить в виде

$$M\frac{d\overline{v}_C}{dt} = \overline{U}^e, \text{ или } M\,\overline{a}_C = \overline{U}^e. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) выражает *теорему о движении центра масс* ***механической системы*****: центр масс механической системы движется как материальная точка с массой равной массе всей системы под действием силы, равной главному вектору внешних сил, действующих на точки системы.**

Проецируя равенство (2.3) на оси координат, получаем:

$$m\ddot{x}_C = U_x^e; \quad m\ddot{y}_C = U_y^e; \quad m\ddot{z}_C = U_z^e.$$

Это *дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы в координатной форме*.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Пусть главный вектор внешних сил, действующих на точки системы, равен нулю, т.е. $\overline{U}_e = 0$. Тогда из (2.2) следует, что

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \overline{Q} = \text{const}. \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) выражает *закон сохранения количества движения в данном пространстве*: **если главный вектор внешних сил, действующих на точки системы, равен нулю, то количество движения системы остается постоянным по величине и направлению.**

Для системы, масса которой постоянна, получаем *закон сохранения движения центра масс*:

$$\overline{U}^e = 0 \Rightarrow M\frac{d\overline{v}_C}{dt} = 0 \Rightarrow \overline{v}_C = \text{const}. \tag{2.5}$$

Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то скорость центра масс системы остается постоянной по величине и направлению.

Предположим, что $\overline{U}^e \neq 0$, но одна из его проекций, равна нулю, тогда получаем

$$U_x^e = 0 \Rightarrow \frac{dQ_x}{dt} = 0 \Rightarrow Q_x = \text{const}.$$

Для системы с постоянной массой

$$\overline{U}_x^e = 0 \Rightarrow M\frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = \text{const}.$$

Эти равенства выражают *закон сохранения проекции количества движения и закон сохранения проекции скорости центра масс*.

Следующие примеры иллюстрируют содержание закона сохранения движения центра масс.

Действие пары сил на свободное твердое тело

Если приложить пару сил к свободному твердому телу, то центр масс будет оставаться в покое, поскольку главный вектор пары равен нулю. Под действием пары сил тело начнет вращаться вокруг центра масс.

Пусть центр масс вращающегося тела (например, маховика) не находится на геометрической оси вращения (рис. 2.2), тогда при вращении возникают центробежные силы, стремящиеся изогнуть вал, и, передаваясь через подшипники на основание, вызывают вибрации всей машины.

Чтобы бороться с этим вредным, действием, шведский инженер *Лаваль* при-

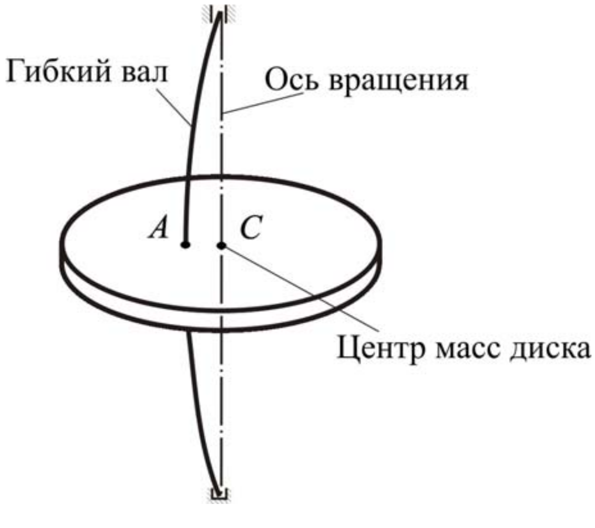

Рис. 2.2

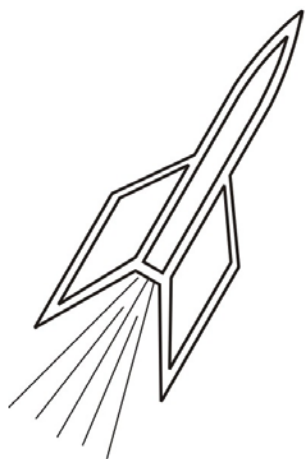

Рис. 2.3

бегнул к средству, кажущемуся на первый взгляд парадоксальным. Он уменьшил диаметр вала, насадив рабочее колесо паровой турбины на тонкий и гибкий вал в палец толщиной.

Оказалось, что колесо турбины в этом случае ведет себя как свободное твердое тело под действием пары сил, т.е. приобретает свойство самоцентрирования: при весьма большой угловой скорости вращения гибкий вал изгибается так, что центр масс колеса приближается к геометрической оси вращения.

Реактивное движение

В реактивном снаряде (рис. 2.3) газообразные продукты сгорания топлива с большой скоростью выбрасываются из сопла.

При отсутствии влияния сил тяжести и сил сопротивления среды и при нулевой начальной скорости, центр масс системы (ракета-топливо) остаётся на месте, а сама ракета движется вперед.

ИМПУЛЬС СИЛЫ И ТЕОРЕМА ИМПУЛЬСОВ

Элементарным импульсом $d\overline{S}$ *силы* $\overline{F}$, действующей в течение времени dt, называют вектор

$$d\overline{S} = \overline{F}dt.$$

Проекции элементарного импульса $d\overline{S}$ на оси прямоугольной декартовой системы координат равны:

$$dS_x = F_x dt; \quad dS_y = F_y dt; \quad dS_z = F_z dt.$$

Импульсом силы $\overline{F}$, действующей на интервале времени (t_0, t), назовем вектор

$$\overline{S} = \int_{t_0}^{t} \overline{F}dt.$$

Проекции импульса силы на оси координат выражаются формулами:

$$S_x = \int_{t_0}^{t} F_x dt; \quad S_y = \int_{t_0}^{t} F_y dt; \quad S_z = \int_{t_0}^{t} F_z dt.$$

Размерность импульса силы

$$[S] = \text{Н} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Запишем теорему о количестве движения в дифференциальной форме:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e .$$

Откуда

$$d\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e dt = \sum_{k=1}^{n} dS_k^e . \qquad (2.6)$$

Таким образом, **дифференциал количества движения механической системы равен сумме элементарных импульсов внешних сил, действующих на точки механической системы.**

Интегрируя (2.6) на интервале $\left[t_1,\ t_2\right]$, получим

$$\int_{\overline{Q}_1}^{\overline{Q}_2} d\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} d\overline{S}_k^e \ \text{ или } \overline{Q}_2 - \overline{Q}_1 = \sum_{k=1}^{n} \overline{S}_k^e . \qquad (2.7)$$

Здесь $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ – количества движения системы в начальный и конечный моменты времени; $\overline{S}_k^e$ – импульс равнодействующей внешних сил, действующих на точку.

Выражение (2.7) представляет собой математическое выражение *теоремы об изменении количества движения механической системы в интегральной форме или теоремы импульсов*: **изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил, действующих на точки механической системы за это время.**

В проекциях на оси координат получаем:

$$Q_{x2} - Q_{x1} = \sum S_{kx}^e; \quad Q_{y2} - Q_{y1} = \sum S_{ky}^e; \quad Q_{z2} - Q_{z1} = \sum S_{kz.}^e \quad .$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Программа решения задач на общие теоремы динамики механической системы

1. *Выбрать механическую систему, движение которой необходимо рассмотреть для решения задачи, и указать пространство, в котором надо рассматривать это движение.*
2. *Указать внешние заданные силы, действующие на точки системы.*
3. *Назвать внешние связи, наложенные на систему, и заменить их реакциями.*
4. *Выписать все внешние и внутренние силы, действующие на точки механической системы.*
5. *Применить общие теоремы динамики для определения искомых величин.*

Механические системы обычно представляют собой различные механизмы, кинематические характеристики звеньев которых требуется находить относительно основания механизма. Поэтому пространство, в котором надо рассмотреть движение такой механической системы, должно быть пространство основания. За начало координатных осей этого пространства может быть принята любая точка на основании механизма, положение которой должно быть специально оговорено. На чертеже задачи положение механической системы показывается в произвольный момент времени. При использовании общих теорем в интегральной форме иногда положение системы целесообразно изобразить в начальном и конечном положениях.

На чертеже показываются внешние заданные силы и реакции внешних связей. Конечно, предварительно надо назвать внешние связи, наложенные на механическую систему. В механических системах, состоящих из твердых и деформируемых тел (механизмы), внутренние силы делятся на два вида: силы взаимодействия между частицами одного и того же тела и силы взаимодействия между телами системы (контактные силы). Следует иметь в виду, что показать все эти силы на чертеже не представляется возможным. Если для решения задачи применяется теорема об изменении кинетической анергии системы или теорема о производной кинетической энергии по времени, то на чертеже следует показать только те внутренние силы, сумма работ или мощностей которых отлична от нуля.

Теорему о количестве движения механической системы удобно применять в том случае, когда силы постоянны или являются функциями времени, а в число данных или неизвестных величин входят: масса, силы, время действия силы, скорости. Для твердого тела эту теорему удобно применять в случае поступательного его движения.
буксовать.

Пример

По борту стоящего свободно на воде катера массой 600 кг и длиной 5 м с носа на корму переходит человек массой 80 кг (рис. 2.6). Пренебрегая сопротивлением воды, определить направление и величину перемещения катера.

Решение

1. *Рассмотрим движение системы катер – человек в пространстве Земли.*
2. *Заданные силы*: сила тяжести катера $\overline{P}_1$, сила тяжести человека $\overline{P}_2$, сила Архимеда $\overline{A}$.
3. *Связей* нет.
4. *Движение системы происходит под действием сил*

$$\left(\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\ \overline{A}, \left\{ \overline{F}_k^i \right\} \right).$$

5. *Составим дифференциальное уравнение движения центра масс системы вдоль оси* x:

$$m\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_C = \text{const}.$$

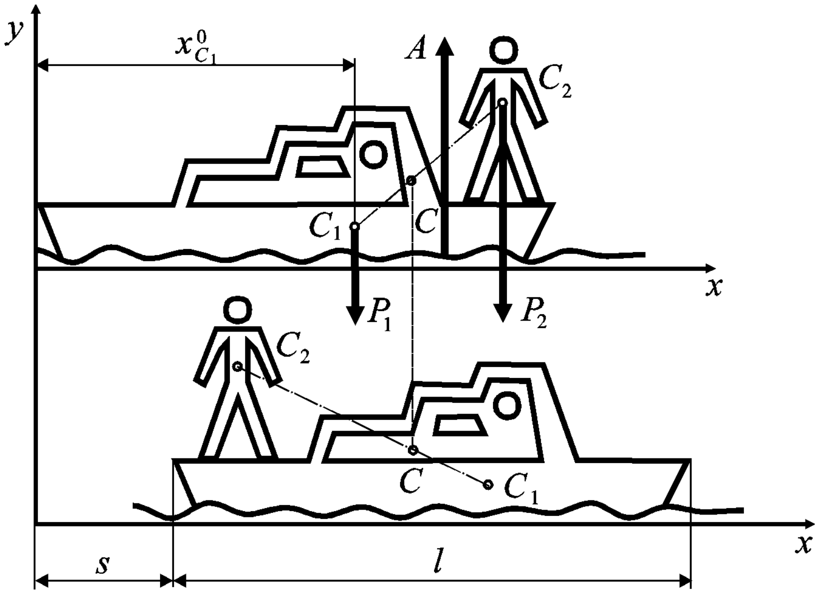

Рис. 2.6

Поскольку в начальный момент времени система находилась в покое, т.е. $\dot{x}_{C0} = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = 0$. Следовательно, $x_C = \text{const}$.

Найдем x_{C0} и x_C в начальном и конечном положениях системы (рис. 2.6):

$$x_{C0} = \frac{m_1 x_{C1}^0 + m_2 l}{m_1 + m_2}; \qquad x_C = \frac{m_1 \left(S + x_{C1} \right) + m_2 S}{m_1 + m_2}.$$

Так как $x_{C0} = x_C$, то получаем

$$m_1 x_{C1}^0 + m_2 l = m_1 S + m_1 x_{C1}^0 + m_2 S,$$

отсюда

$$S = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \Rightarrow S = 0{,}59 \text{ м}.$$

Катер передвинется вперёд на 0,59 м.

3. КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА

Пусть материальная точка A массой m движется со скоростью $\bar{v}$ в пространстве $Oxyz$ (рис. 3.1), $\bar{q} = m\bar{v}$ – количество движения точки в этом пространстве.

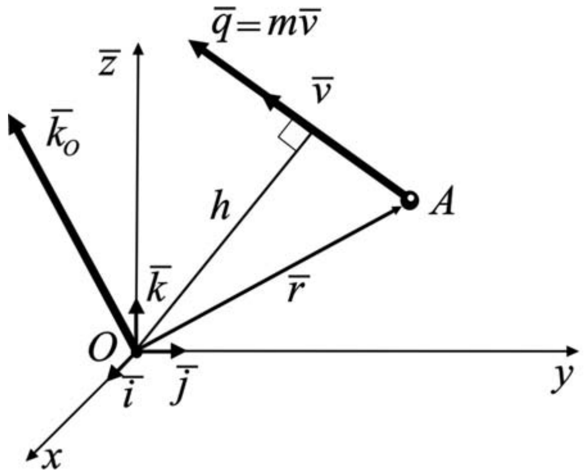

Рис. 3.1

Кинетическим моментом точки относительно центра O (*моментом количества движения точки относительно центра O*) называют величину, равную векторному произведению радиуса-вектора точки относительно центра на количество движения точки:

$$\bar{k}_O = \overline{mom}_O\,\bar{q} = \bar{r}\times\bar{q} = \bar{r}\times m\bar{v}. \quad (3.1)$$

Вектор $\bar{k}_O$ приложен в центре O и образует с векторами $\bar{r}$ и $\bar{q}$ правую тройку векторов. Модуль кинетического момента равен произведению количества движения на расстояние от центра до линии действия вектора скорости (рис. 3.1).

$$k_O = q\,h.$$

Кинетический момент точки относительно центра можно представить в матричной форме:

$$\bar{k}_O = \bar{r}\times\overline{mv} = m\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (3.2)$$

Здесь x, y, z – координаты точки; v_x, v_y, v_z – проекции ее скорости на оси координат.

Проекции кинетического момента на оси координат можно записать, раскрывая определитель (3.2) по элементам первой строки:

$$(k_O)_x = m(y\,v_z - z\,v_y);\ (k_O)_y = m(z\,v_x - x\,v_z);\ (k_O)_z = m(x\,v_y - y\,v_x). \quad (3.3)$$

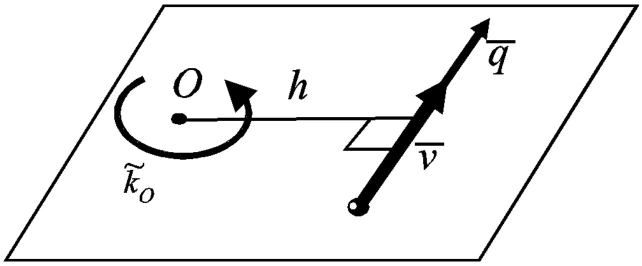

Рис. 3.2

В плоскости, проходящей через центр O и вектор скорости точки, кинетический момент точки относительно центра можно рассматривать как величину алгебраическую и изображать дуговой стрелкой (рис. 3.2):

$$\widetilde{k}_O = \pm m v h .$$

Знак $\widetilde{k}_O$ берется положительным, когда кинетический момент направлен против хода часовой стрелки.

КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Кинетическим моментом точки относительно оси назовем алгебраический момент проекции количества движения точки на плоскость перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с плоскостью (рис. 3.3):

$$k_z = \widetilde{mom}_O\left(m \cdot \overline{v}_\Pi\right) = \pm m\, v_\Pi\, h_\Pi .$$

Величина k_z считается положительной, если наблюдатель, смотрящий с конца положительного направления оси z, видит движение точки относительно оси происходящим против хода часовой стрелки.

Кинетические моменты относительно центра O и оси z, проходящей через этот центр, связаны зависимостью

$$k_z = \left(\overline{k}_O\right)_z . \tag{3.4}$$

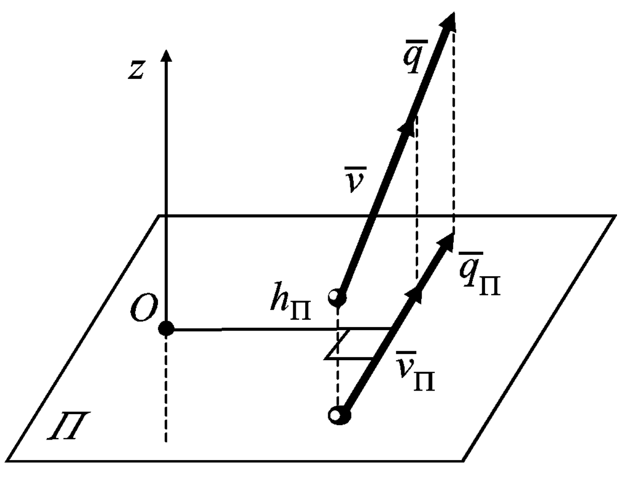

Рис. 3.3

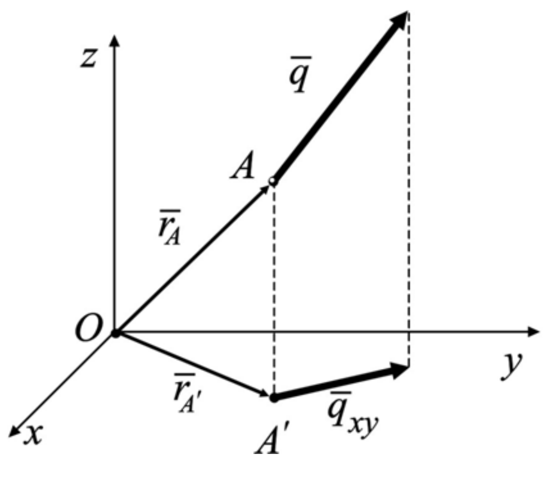

Рис. 3.4

Проекция кинетического момента точки относительно некоторого центра на ось проходящую через этот центр равна кинетическому моменту точки относительно данной оси.

В самом деле, модули величин в уравнении (3.4) равны (рис. 3.4):

$$\left| k_z \right| = \left| \overline{mom_O \, \overline{q}_{xy}} \right| = \left| \overline{r}_{A'} \times \overline{q}_{xy} \right| = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & 0 \\ q_x & q_y & 0 \end{vmatrix} = \left| q_y \, x - y \, q_x \right| = \left| \left(k_O \right)_z \right|.$$

Нетрудно проверить и равенство их знаков.

Теперь можем записать:

$$k_x = \left(\overline{k}_O \right)_x ; \quad k_y = \left(\overline{k}_O \right)_y ; \quad k_z = \left(\overline{k}_O \right)_z .$$

КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим движение механической системы $\{ A_k \}_n$ материальных точек в пространстве $Oxyz$.

Кинетический момент механической системы или главный момент количеств движения точек системы относительно какого-либо центра или оси – это сумма кинетических моментов точек системы относительно того же центра или той же оси:

$$\overline{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{k}_{Ok} = \sum_{k=1}^{n} \overline{mom_O \overline{q}_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times m_k \, \overline{v}_k \quad , \tag{3.5}$$

$$K_z = \sum_{k=1}^{n} k_{zk} = \sum_{k=1}^{n} mom_z \ \overline{q}_k \, . \tag{3.6}$$

Здесь $\overline{r}_k$ – радиус-вектор точки A_k; $\overline{v}_k$ – ее скорость; m_k – масса (рис. 3.5).

Проекции кинетического момента системы относительно центра на оси координат с началом в этом центре равны кинетическим моментам системы относительно соответствующих осей координат:

$$\left(\overline{K}_O \right)_x = K_x ; \quad \left(\overline{K}_O \right)_y = K_y ; \quad \left(\overline{K}_O \right)_z = K_z .$$

Изменение кинетического момента механической системы при изменении центра

Пусть $\overline{\rho}_k$ – радиус-вектор точки A_k относительно произвольной точки D, а $\overline{r}_D$ – радиус-вектор точки D (рис. 3.5):

$$\bar{r}_k = \bar{\rho}_k + \bar{r}_D \;\Rightarrow\; \bar{\rho}_k = \bar{r}_k - \bar{r}_D.$$

Тогда

$$\bar{K}_D = \sum_{k=1}^{n} \bar{\rho}_k \times \bar{m}_k \, \bar{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k \, \bar{v}_k - \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_D \times m_k \, \bar{v}_k =$$

$$= \bar{K}_O - \bar{r}_D \times \sum_{k=1}^{n} m_k \, \bar{v}_k = \bar{K}_O - \bar{r}_D \times \bar{Q}.$$

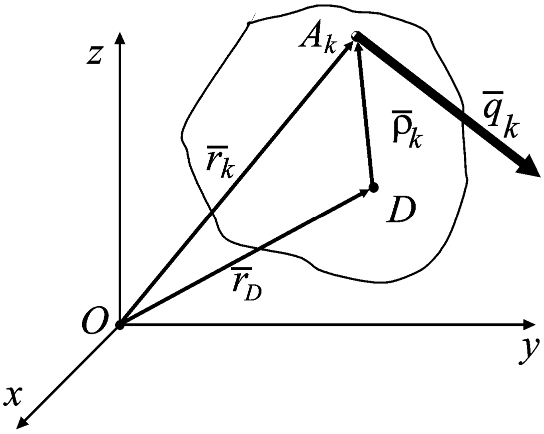

Рис. 3.5

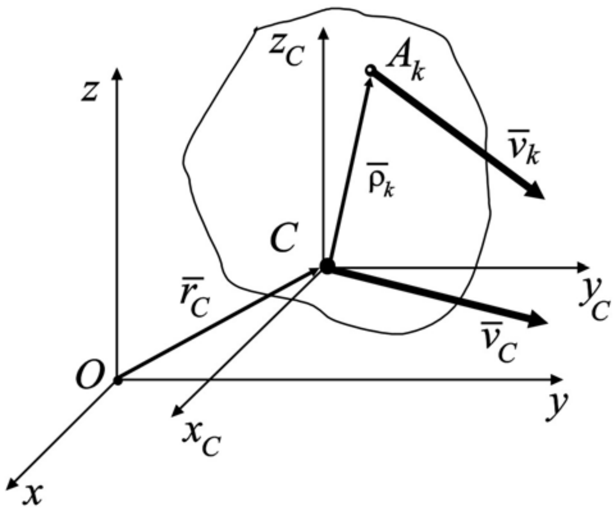

Рис. 3.6

Или

$$\bar{K}_O = \bar{K}_D + \bar{r}_D \times \bar{Q}. \tag{3.7}$$

Эта формула сохраняет свой вид, если новый центр движется относительно неподвижного центра.

За подвижный центр удобно брать центр масс механической системы – точку C. В этом случае с центром масс связывают подвижную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно неподвижной. Эту подвижную систему отсчета $C\,x_C y_C z_C$ называют *пространством Кёнига* (рис. 3.6).

Скорость точки A_k можно найти по формуле $\bar{v}_k = \bar{v}_C + \bar{v}_k^r$, где $\bar{v}_k^r$ – скорость точки в пространстве Кенига.

Теперь

$$\bar{K}_C = \sum_{k=1}^{n} \bar{\rho}_k \times \bar{m}_k \left(\bar{v}_C + \bar{v}_k^r \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \, \bar{\rho}_k \right) \times \bar{v}_C + \sum_{k=1}^{n} \bar{\rho}_k \times m_k \, \bar{v}_k^r \;,$$

но $\sum_{k=1}^{n} m_k \, \bar{\rho}_k = 0$, так как это статический момент механической системы относительно центра масс, а $\sum_{k=1}^{n}\bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k^r = \bar{K}_c^r$ – кинетический момент механической системы в пространстве Кенига. В итоге из формулы (3.7) получаем

$$\bar{K}_O = \bar{r}_c \times \bar{Q} + \bar{K}_c^r. \tag{3.8}$$

КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим движение твердого тела массой M в пространстве $Oxyz$ (рис. 3.7).

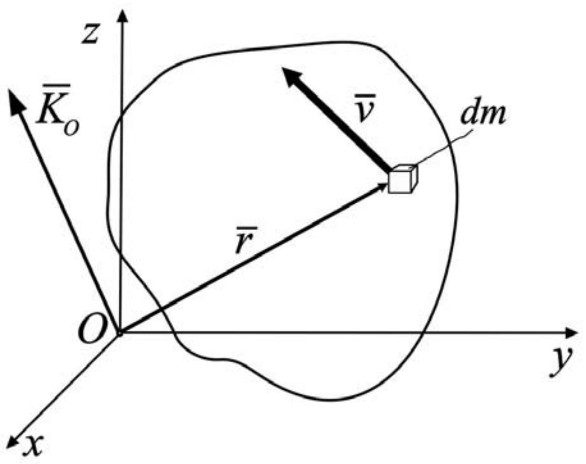

Рис. 3.7

Пусть $\bar{r}$ – радиус-вектор элемента тела массой dm, скорость которого $\bar{v}$. Тогда для кинетического момента тела относительно центра O можем записать:

$$\bar{K}_O = \int\limits_{(M)} \left(\bar{r} \times \bar{v}\right) dm. \tag{3.9}$$

Если тело совершает сферическое движение вокруг неподвижной точки O, то скорость элемента

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Для векторного произведения $\bar{r} \times \bar{v}$ будем иметь, записав двойное векторное произведение в соответствии с известным правилом:

$$\bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \bar{b}\left(\bar{a} \cdot \bar{c}\right) - \bar{c}\left(\bar{a} \cdot \bar{b}\right); \Rightarrow \bar{r} \times \bar{v} = \bar{r} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}\right) = \bar{\omega} r^2 - \bar{r}\left(\bar{r} \cdot \bar{\omega}\right).$$

Последнее слагаемое запишем в матричной форме:

$$\bar{r}\left(\bar{r} \cdot \bar{\omega}\right) = \| r \| \cdot \| r \|^T \cdot \| \omega \| = \| \omega \| \cdot \left(\| r \| \cdot \| r \|^T\right) = \bar{\omega}\left(\bar{r} \otimes \bar{r}\right).$$

Здесь $\| r \| = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$; $\| r \|^T = \begin{vmatrix} x & y & z \end{vmatrix}$,

$\bar{r} \otimes \bar{r} = \| r \| \cdot \| r \|^T$ – *диадное* (*тензорное*) произведение векторов.

Теперь можем записать

$$\bar{r} \times \bar{v} = \bar{\omega}\left(E r^2 - \bar{r} \otimes \bar{r}\right), \tag{3.10}$$

где $E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ – единичный тензор.

Выражение (3.9) с учетом (3.10) принимает вид

$$\overline{K}_O = \overline{\omega} \int\limits_{(M)} \left(E r^2 - \overline{r} \otimes \overline{r} \right) dm = \overline{\omega} \mathbf{I}_O ,$$

где $\mathbf{I}_O = \int\limits_{(M)} \left(E r^2 - \overline{r} \otimes \overline{r} \right) dm$ – тензор инерции твердого тела в точке O.

В итоге получаем формулу для кинетического момента твердого тела относительно неподвижного центра при сферическом движении

$$\overline{K}_O = \overline{\omega}\, \mathbf{I}_O = \mathbf{I}_O\, \overline{\omega}. \qquad (3.11)$$

Здесь имеется в виду, что умножение вектора на симметричный тензор безразлично слева и справа.

Для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, будем имеем $\overline{\omega} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\omega} \end{vmatrix}^T$ (рис. 3.8), следовательно:

$$\overline{K}_O = \mathbf{I}_O\, \overline{\omega} = \begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -I_{xz} \\ -I_{yz} \\ I_z \end{vmatrix} \tilde{\omega} = \tilde{\omega} \left(-I_{xz}\, \overline{i} - I_{yz}\, \overline{j} + I_z\, \overline{k} \right).$$

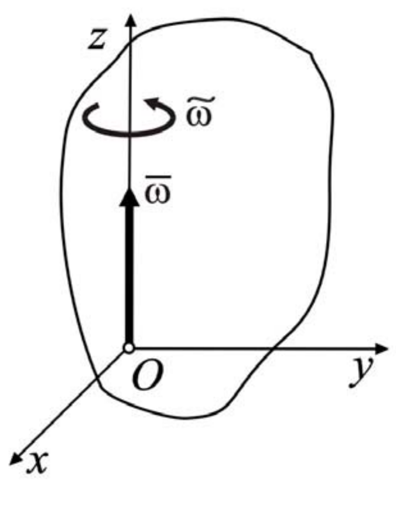

Рис. 3.8

Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, относительно оси вращения может быть найден по формуле:

$$\tilde{K}_z = \left(\overline{K}_O \right)_z = I_z\, \tilde{\omega}. \qquad (3.12)$$

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на алгебраическую угловую скорость.

В общем случае движения твердого тела, взяв за полюс центр масс тела и связав с полюсом пространство Кенига, будем иметь поступательное движение тела со скоростью

$\overline{v}_C$ центра масс и сферическое движение с угловой скоростью $\overline{\omega}$ вокруг центра масс (рис. 3.9).

Кинетический момент тела в пространстве Кенига запишется в виде

$$\overline{K}_C^r = \mathbf{I}_C \cdot \overline{\omega},$$

где $\mathbf{I}_C$ – тензор инерции тела в центре масс.

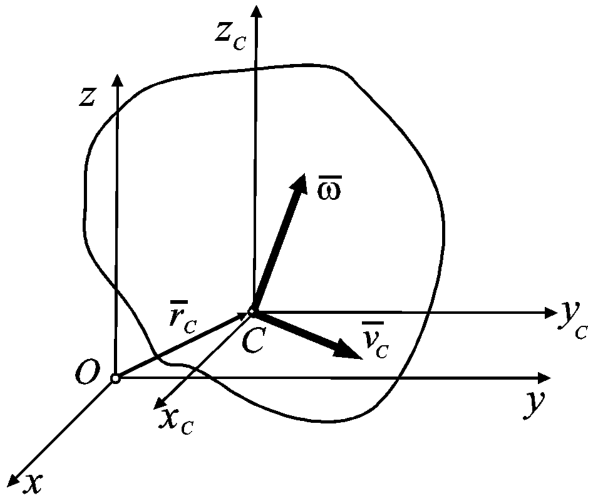

Рис. 3.9

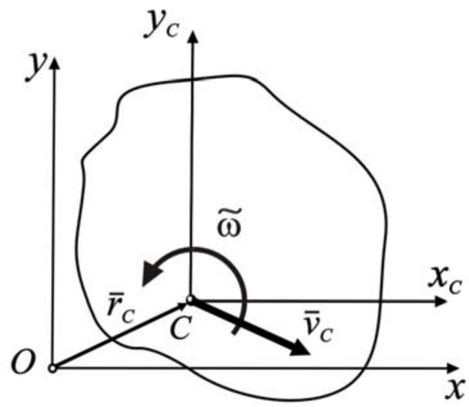

Рис. 3.10

Теперь кинетический момент тела относительно неподвижного центра O (формула 3.6) можем записать в виде

$$\overline{K}_O = \overline{r}_C \times M\,\overline{v}_C + \mathbf{I}_C\ \overline{\omega}. \tag{3.13}$$

Для *плоского движения* тела кинетический момент в пространстве Кенига можно рассматривать как величину алгебраическую:

$$\tilde{K}_C^r = I_{zC}\ \tilde{\omega}, \tag{3.14}$$

поскольку здесь относительное движение в *кениговом* пространстве есть вращение вокруг оси z_C, перпендикулярной основной плоскости (перпендикулярной плоскости рисунка 3.10).

Кинетический момент тела для плоского движения также можно рассматривать как алгебраический и найти по формуле

$$K_O = \widetilde{mom}_O\left(M\,\overline{v}_C \right) + I_{zC}\,\tilde{\omega}. \tag{3.15}$$

4. ТЕОРЕМЫ О КИНЕТИЧЕСКОМ МОМЕНТЕ

ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОМ МОМЕНТЕ ТОЧКИ

Рассмотрим движение механической системы $\{A_k\}_n$ материальных точек в инерциальной системе отсчета $Oxyz$ (рис. 4.1). Пусть $\{\overline{F}_k^e\}_n$ внешние и $\{\overline{F}_k^i\}_n$ – внутренние силы, действующие на точки системы. Точка A_k массой m_k движется под действием силы $\overline{F}_k^e$, являющейся равнодействующей внешних сил, действующих на данную точку, и $\overline{F}_k^i$, являющейся равнодействующей внутренних сил, действующих на данную точку, $\overline{a}_k$ – ускорение точки.

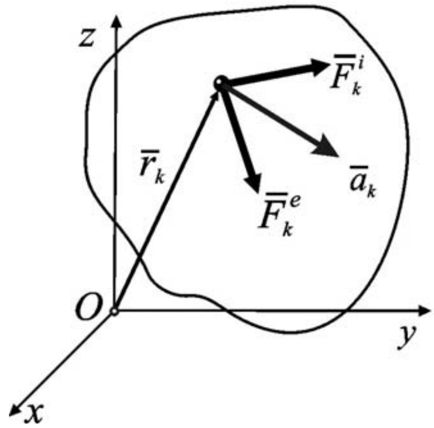

Рис. 4.1

Запишем для точки A_k системы основное уравнение динамики

$$m_k \frac{d\,\overline{v}_k}{d\,t} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i$$

и умножим его векторно слева на радиус-вектор $\overline{r}_k$:

$$\overline{r}_k \times m_k \frac{d\,\overline{v}_k}{d\,t} = \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e + \overline{r}_k \times \overline{F}_k^i .$$

Преобразуем левую часть полученного уравнения:

$$\overline{r}_k \times m_k \frac{d\,\overline{v}_k}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\left(\overline{r}_k \times m_k\,\overline{v}_k \right) - \frac{d\,\overline{r}_k}{d\,t} \times m_k\,\overline{v}_k .$$

Но $\dfrac{d\,\overline{r}_k}{d\,t} \times m_k\,\overline{v}_k = \overline{v}_k \times m_k\,\overline{v}_k = 0$ как векторное произведение коллинеарных векторов. В итоге получаем

$$\frac{d}{d\,t}\left(\overline{r}_k \times m_k\,\overline{v}_k \right) = \frac{d\,\overline{k}_O}{d\,t} = \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e + \overline{r}_k \times \overline{F}_k^i = \sum_{k=1}^{n} \overline{mom_O \overline{F}_k} ,$$

или

$$\frac{d\,k_O}{d\,t}=\sum_{k=1}^{n}\overline{mom}_O\overline{F}_k\,, \tag{4.1}$$

Проецируя (4.1) на оси координат, найдем

$$\frac{d\,k_x}{d\,t}=\sum_{k=1}^{n}mom_x\overline{F}_k;\ \frac{d\,k_y}{d\,t}=\sum_{k=1}^{n}mom_y\overline{F}_k;\ \frac{d\,k_z}{d\,t}=\sum_{k=1}^{n}mom_z\overline{F}_k; \tag{4.2}$$

Формулы (4.1) и (4.2) выражают *теорему о кинетическом моменте точки*: **производная по времени от кинетического момента точки относительно какого-либо центра или оси равна сумме моментов сил, действующих на точку относительно того же центра или оси.**

ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОМ МОМЕНТЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОГО ЦЕНТРА

Записав теорему об изменении кинетического момента для всех точек системы и сложив полученные выражения, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d\,\overline{k}_O}{d\,t}=\sum_{k=1}^{n}\overline{mom}_O\ \overline{F}_k^e+\sum_{k=1}^{n}\overline{mom}_O\ \overline{F}_k^i\ .$$

В этом выражении:

$\sum_{k=1}^{n}\frac{d\,\overline{k}_O}{d\,t}=\frac{d}{d\,t}\sum_{k=1}^{n}\overline{k}_O=\frac{d\,\overline{K}_O}{d\,t}$ – производная кинетического момента механической системы относительно центра O;

$\sum_{k=1}^{n}\overline{mom}_O\ \overline{F}_k^e=\overline{L}_O^e$ – главный момент внешних сил системы относительно центра O;

$\sum_{k=1}^{n}\overline{mom}_O\ \overline{F}_k^i=\overline{L}_O^i=0$ – главный момент внутренних сил системы.

Окончательно имеем

$$\frac{d\,\overline{K}_O}{d\,t}=\overline{L}_O^e\,. \tag{4.3}$$

Спроецировав (4.3) на оси координат получим:

$$\frac{d\,K_x}{d\,t}=L_x^e;\quad \frac{d\,K_y}{d\,t}=L_y^e;\quad \frac{d\,K_z}{d\,t}=L_z^e. \tag{4.4}$$

Здесь L_x^e, L_y^e, L_z^e – главные моменты внешних сил системы относительно осей координат.

Формулы (4.3) и (4.4) выражают *теорему об изменении кинетического момента механической системы* или *теорему о кинетическом моменте механической системы в дифференциальной форме*: **производная по времени от кинетического момента механической системы относительно какого-либо неподвижного центра или оси равна главному моменту внешних сил системы относительно того же центра или оси**.

Из этой теоремы можно, как следствие, получить *законы сохранения кинетического момента.*

1. **Если главный момент внешних сил системы относительно центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра постоянен по модулю и направлению:**

$$\overline{L}_O^e = 0 \;\Rightarrow\; \overline{K}_O = \text{const}. \qquad (4.5)$$

2. **Если главный момент внешних сил системы относительно какой-либо оси равен нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси остается постоянным:**

$$L_z^e = 0 \;\Rightarrow\; K_z = \text{const}. \qquad (4.6)$$

Выражению (4.3) можно придать геометрическую форму, если заметить, что производная от вектора по времени равна скорости конца этого вектора (рис. 4.2). В результате формулируется *теорема Резаля*: **скорость конца вектора кинетического момента механической системы относительно центра равна главному моменту внешних сил относительно тогоже центра:**

$$\overline{u} = \overline{L}_O^e$$

Проинтегрировав дифференциальное уравнение (4.3) на некотором интервале времени (t_1, t_2), получим *теорему о кинетическом моменте механической системы в интегральной форме*

$$\overline{K}_{O_1} - \overline{K}_{O_2} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{L}_O^e \, dt. \qquad (4.7)$$

Здесь $\overline{K}_{O_1}$ и $\overline{K}_{O_2}$ – соответственно кинетические моменты механической системы в моменты времени t_1 и t_2, а величина

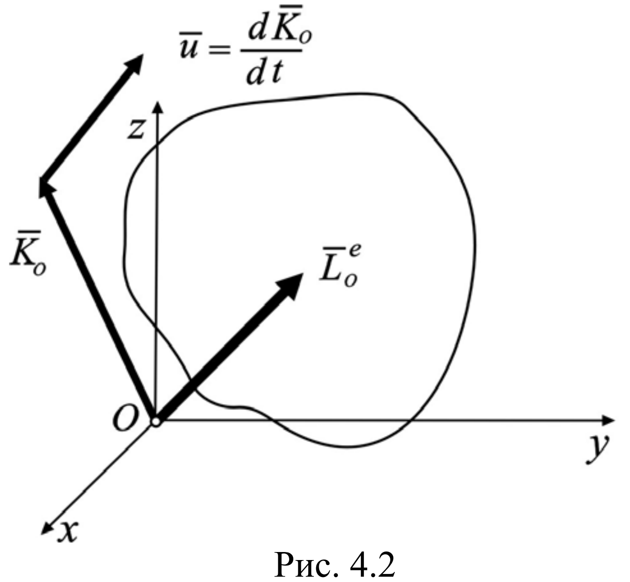

Рис. 4.2

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{L}_O^e \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{mom_O \, F_k^e} \right) dt$$

называется *главным импульсом моментов внешних сил*.

ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОМ МОМЕНТЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДВИЖНОГО ЦЕНТРА

Рассмотрим движение механической системы $\{ A_k \}_n$ материальных точек в пространстве $Oxyz$ (рис. 4.3). Пусть D – некоторая произвольная точка этой системы

Используя полученные ранее выражения (3.7) (4.3), запишем

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overline{r}_D \times \overline{Q} + \overline{K}_D \right) =$$

$$= \frac{d\overline{r}_D}{dt} \times \overline{Q} + \overline{r}_D \times \frac{d\overline{Q}}{dt} + \frac{d\overline{K}_D}{dt} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{r}_D + \overline{\rho}_k \right) \times \overline{F}_k^e .$$

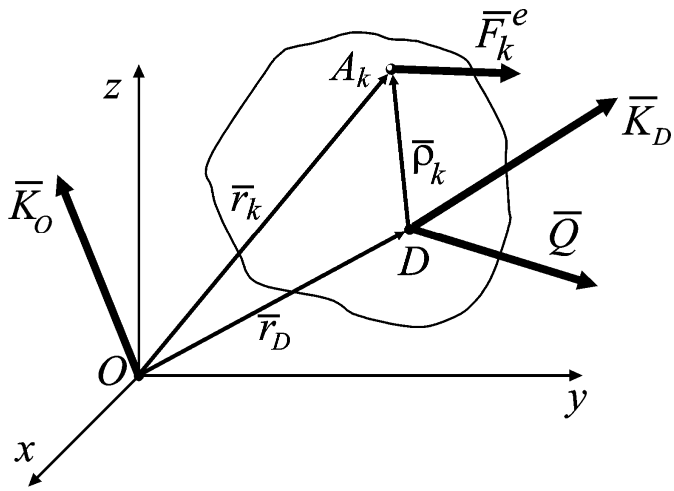

Рис. 4.3

Учитывая, что $\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^e$,

получим

$$\overline{v}_D \times \overline{Q} + \overline{r}_D \times \left(\frac{d\overline{Q}}{dt} - \overline{F}_k^e \right) + \frac{d\overline{K}_D}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\rho}_k \times \overline{F}_k^e ,$$

или

$$\frac{d\overline{K}_D}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\rho}_k \times \overline{F}_k^e - \overline{v}_D \times \overline{Q} .$$

Здесь $\sum_{k=1}^{n} \overline{\rho}_k \times \overline{F}_k^e = \overline{L}_D^e$ – главный момент внешних сил относительно центра D.

В итоге будем иметь

$$\frac{d\,\overline{K}_D}{d\,t} = \overline{L}_D^e - \overline{v}_D \times \overline{Q}. \qquad (4.8)$$

Если в качестве подвижного центра взять центр масс – точку C, то (4.8) запишется в виде

$$\frac{d\,\overline{K}_C}{d\,t} = \overline{L}_C^e - \overline{v}_C \times \overline{Q}.$$

Но $\overline{K}_C = \overline{K}_C^r$, а $\overline{v}_C \times \overline{Q} = \overline{v}_C \times M\,\overline{v}_C = 0$.

Окончательно имеем

$$\frac{d\,\overline{K}_C^r}{d\,t} = \overline{L}_C^e. \qquad (4.9)$$

Можем сформулировать ***теорему о кинетическом моменте относительно центра масс***: **производная по времени от кинетического момента механической системы относительно центра масс равна главному моменту внешних сил, действующих на точки системы относительно центра масс.**

В проекциях на оси кениговой системы координат $C\,x_C y_C z_C$ имеем

$$\frac{d\,K_{x_C}^r}{d\,t} = L_{x_C}^e, \quad \frac{d\,K_{y_C}^r}{d\,t} = L_{y_C}^e, \quad \frac{d\,K_{z_C}^r}{d\,t} = L_{z_C}^e. \qquad (4.10)$$

Пример

Через блок, массой которого пренебрегаем, перекинут канат, за концы которого ухватились две обезьянки A и B одинакового веса (рис. 4.4). Что произойдёт с обезьянкой B, если обезьянка A станет подниматься по канату со скоростью u относительно каната?

Решение

1. *Рассмотрим движение механической системы* (блок, канат, обезьянки) в пространстве основания.
2. *Заданные внешние силы*: силы тяжести обезьян, $\overline{P}_A, \overline{P}_B$; $\left(P_A = P_B = P\right)$.
3. *Связи*: подшипник O блока. Его реакция $\overline{R}_O$.
4. *Механическая система движется под действием сил*

$$\left(\overline{P}_A, \overline{P}_B, \overline{R}_{O,} \left\{\overline{F}_k^i\right\}_n\right),$$

5. *Применим теорему о кинетическом моменте системы относительно оси* z *вращения блока*

$$\frac{d\,K_z}{d\,t} = \sum_{k=1}^{n} m_z\,\overline{F}_k^e = 0.$$

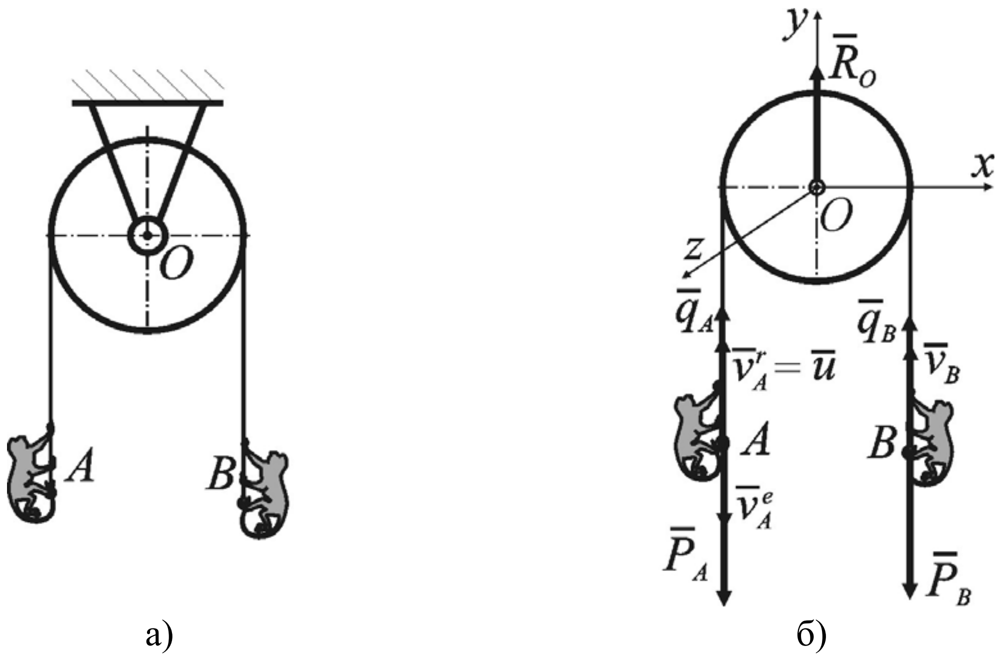

Рис. 4.4

Следовательно,

$$K_z = \text{const}\text{ , так как } K_{z0} = 0 \Rightarrow K_z = 0\,.$$

Составим кинетический момент системы относительно оси z:

$$K_z = K_z(A) + K_z(B)\,,$$

где $K_z(A)$ и $K_z(B)$ – моменты количеств движения обезьянок относительно оси блока.

Количество движения обезьянки B: $\overline{q}_B = \dfrac{P}{g}\overline{v}_B$.

Чтобы найти количество движения обезьянки A, представим её движение в пространстве основания сложным, связав подвижную систему отсчёта с канатом, модуль скорости которого равен v_B.

По теореме сложения скоростей имеем

$$\overline{v}_A = \overline{v}_A^r + \overline{v}_A^e\,,$$

где

$$\overline{v}_A^r = \overline{u}\text{ , а } \overline{v}_A^e = \overline{v}_B\,.$$

Проецируя векторное равенство на ось y, найдём

$$v_{Ay} = u - v_B; \quad q_{Ay} = \frac{P}{g}(u - v_B),$$

тогда

$$K_z = m_z \overline{q}_A + m_z \overline{q}_B \; ;$$

$$K_z = -\frac{P}{g}(u - v_B)r + \frac{P}{g} v_B r = 0.$$

Откуда получим

$$-u + 2v_B = 0 \Rightarrow v_B = \frac{u}{2} \;\text{ и }\; v_A = u - v_B = \frac{u}{2}.$$

Т.е. скорости обезьянок в пространстве основания одинаковы и равны $u/2$. Как висели они одна напротив другой, так и будут подниматься вверх. Только одна при этом работает, а другая просто катается.

5. РАБОТА И МОЩНОСТЬ СИЛЫ

Рассмотрим движение точки M под действием силы $\overline{F}$. Пусть $\overline{r}$ – радиус-вектор точки относительно начала системы отсчета $Oxyz$ (рис. 5.1).

Для характеристики действия силы на материальную точку на протяжении некоторого пути, пройденного точкой, вводится мера этого действия, называемая работой силы.

Элементарная работа силы – **величина равная скалярному произведению вектора силы на вектор $d\overline{r}$ элементарного перемещения точки приложения силы**:

$$\delta A = \overline{F} \cdot d\overline{r} \quad \Rightarrow \begin{cases} \delta A = F \cos\alpha \cdot d\sigma = \\ \delta A = F_x\, dx + F_y\, dy \\ \delta A = \overline{F} \cdot \overline{v}\; dt. \end{cases}$$

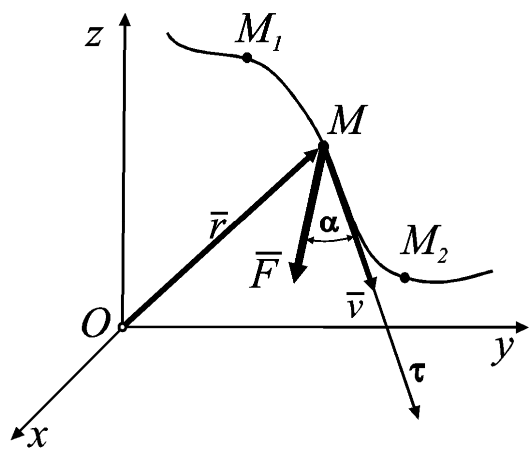

Рис. 5.1

Здесь α – угол между силой и скоростью точки, $d\sigma$ – приращение дуговой координаты точки, F_x, F_y, F_z – проекции силы на оси координат.

Работой силы на конечном перемещении $M_0 M$ **называется интеграл от элементарных работ на этом перемещении**

$$A_{M_0 M} = \int_{M_0}^{M} \delta A = \int_{M_0}^{M} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{x_0}^{x} F_x\, dx + \int_{y_0}^{y} F_y\, dy + \int_{z_0}^{z} F_z\, dz = \int_{t_0}^{t} \overline{F} \cdot \overline{v}\, dt = \int_{\sigma_0}^{\sigma} F_\tau\, d\sigma.$$

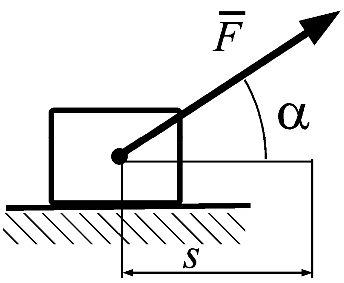

Рис. 5.2

Если $\overline{F} = \text{const}$ и путь прямолинеен (рис. 5.2), то можем записать

$$A = F\, s \cos\alpha.$$

Размерность работы силы

$$[\,A\,] = \text{Н} \cdot \text{м=Дж}.$$

Мощность (работоспособность) силы – отношение элементарной работы к промежутку времени, в течение которого эта работа совершена:

$$W = \frac{\delta A}{dt} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} W = \overline{F} \cdot \overline{v} = F\, v \cos\alpha, \\ W = F_x\, \dot{x} + F_y\, \dot{y} + F_z\, \dot{z}, \\ W = F_\tau\, v_\tau. \end{cases}$$

$$A = \int_{t_0}^{t} W\, dt.$$

Размерность мощности

$$[\,W\,] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

В качестве единицы мощности часто используют *лошадиную силу*:

1 л.с. = 735,5 Вт = 0,7355 кВт.

Очевидно, что работа и мощность системы сил равна сумме работ и мощностей сил системы.

Примеры вычисления работы

Работа силы тяжести

Силу тяжести тела вблизи поверхности Земли считаем постоянной (рис. 5.3):

$$P_x = P_y = 0, \;\; P_z = -m g.$$

При перемещении точки из положения $M_1(x_1,y_1,z_1)$ в положение $M_2(x_2,y_2,z_2)$:

$$\delta A_p = P_x\, dx + P_y\, dy + P_z\, dz =$$

$$P_z\, dz = -mg\, dz.$$

$$A_{1,2} = -\int_{z_1}^{z_2} mg\, dz = -mg\int_{z_1}^{z_2} dz = -mg\,\Delta z.$$

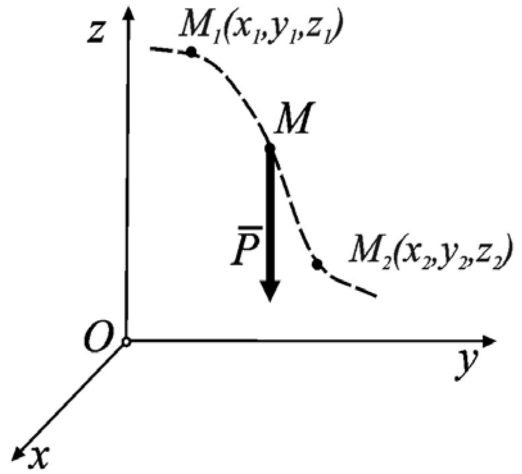

Рис. 5.3

Работа силы тяжести не зависит от формы пути и равна произведению веса тела на изменение высоты центра тяжести.

Работа силы упругости

Будем рассматривать линейную силу упругости (рис. 5.4), когда

$$F_x = -c\left(x - x_0\right),$$

где x_0 – длина недеформированной пружины.

Тогда элементарная работа

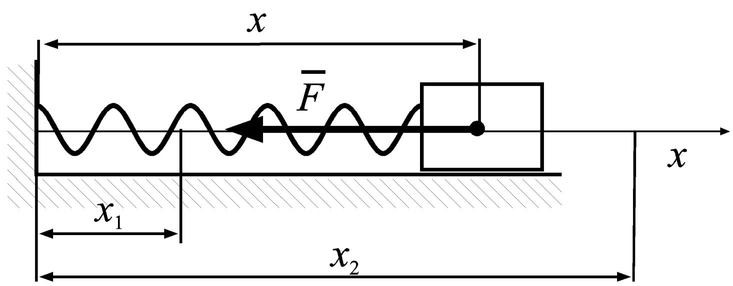

Рис. 5.4

$$\delta A = F_x dx = -F\, dx = -c\left(x - x_0\right) dx.$$

Полная работа силы упругости пружины

$$A_{1,2} = -\int_{x_1}^{x_2} c\left(x - x_0\right) dx = -\left.\frac{c\left(x - x_0\right)^2}{2}\right|_{x_1}^{x_2} = -\frac{c\left(\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2\right)}{2},$$

где $\Delta x_1, \Delta x_2$ – деформации пружины в начальном и конечном положениях движущегося тела.

Работа внутренних сил механической системы

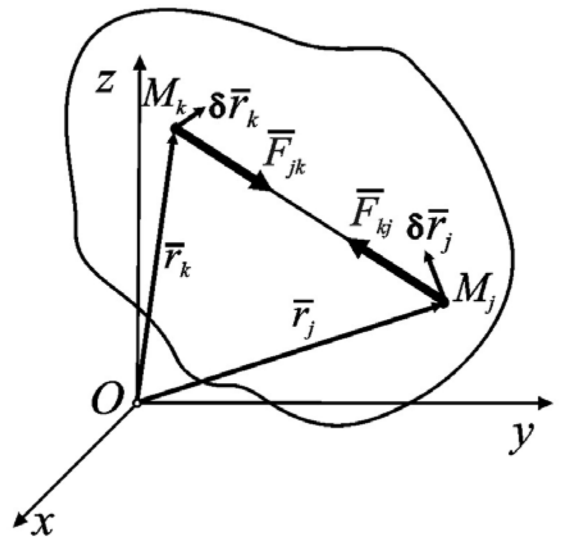

Рис. 5.5

Как известно, силы, действующие на точки механической системы, можно разделить на внешние $\left\{\overline{F}_k^e\right\}_n$, т.е. силы, действующие на точки системы со стороны тел, не входящих в механическую систему, и внутренние $\left\{\overline{F}_k^i\right\}_n$ – силы взаимодействия между точками системы (рис. 5.5). Известно также, что главный вектор и главный момент внутренних сил относительно любого центра равны нулю:

$$\overline{U}^i = 0, \quad \overline{L}_O^i = 0, \qquad \forall O.$$

Для двух точек внутренние силы $\overline{F}_{kj} = -\overline{F}_{jk}$ по закону равенства действия и противодействия. Сумма элементарных работ этих сил

$$\delta A_{kj} = \overline{F}_{jk} \cdot d\,\overline{r}_k + \overline{F}_{kj} \cdot d\,\overline{r}_j \quad \Rightarrow \quad \delta A_{kj} = \overline{F}_{jk}\left(d\,\overline{r}_k - d\,\overline{r}_j\right),$$

но

$$\overline{r}_j - \overline{r}_k = \overline{\rho}_{kj} \quad \Rightarrow \quad d\,\overline{r}_k - d\,\overline{r}_j = -d\,\overline{\rho}_{kj}\ .$$

Теперь

$$\delta A_{kj} = \overline{F}_{jk} \cdot d\,\overline{\rho}_{kj} \quad \Rightarrow \quad \delta A_{kj} = -F_{kj}\,d\,\rho_{kj}\,.$$

Элементарная работа сил взаимодействия между точками системы равна взятому с обратным знаком произведению одной из сил взаимодействия на изменение расстояния между точками.

Для системы сил

$$\delta A^i = -\sum_{\substack{k \neq j \\ k > j}}^{n} F_{kj}\,d\,\rho_{kj}\,.$$

Для твердого тела, расстояние между точками которого остается неизменным, сумма работ внутренних сил равна нулю.

Работа и мощность системы сил, приложенных к твердому телу

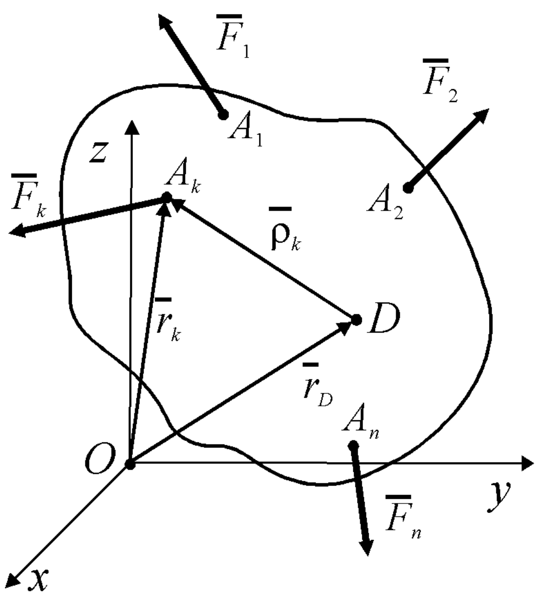

Рис. 5.7

Пусть тело Q движется в пространстве $Oxyz$ под действием системы сил $\{\overline{F}_k\}_n$, приложенных в точках $\{A_k\}_n$ (рис. 5.7). Найдем мощность силы $\overline{F}_k$. Выбрав полюс в некоторой точке D, можем записать $\overline{v}_k = \overline{v}_D + \overline{\omega} \times \overline{\rho}_k$, где $\overline{v}_D$ – скорость полюса.

Теперь

$$W_k = \overline{F}_k \cdot \overline{v}_k = \overline{F}_k \cdot \overline{v}_D + \overline{F}_k \left(\overline{\omega} \times \overline{\rho}_k \right),$$

но

$$\overline{F}_k \left(\overline{\omega} \times \overline{\rho}_k \right) = \overline{\omega} \cdot \left(\overline{\rho}_k \times \overline{F}_k \right) = \overline{\omega} \cdot \left(\overline{m}_D \, \overline{F}_k \right).$$

Следовательно,

$$W_k = \overline{F}_k \cdot \overline{v}_D + \overline{\omega} \cdot \left(\overline{m}_D \overline{F}_k \right). \tag{5.1}$$

Мощность системы сил найдем, суммируя (5.1) по всем точкам $\{A_k\}_n$:

$$W = \sum W_k = \sum \overline{F}_k \cdot \overline{v}_D + \sum \overline{\omega} \cdot \left(\overline{m}_D \overline{F}_k \right) =$$
$$= \left(\sum \overline{F}_k \right) \cdot \overline{v}_D + \overline{\omega} \cdot \sum \overline{m}_D \, \overline{F}_k = \overline{U}_D \cdot \overline{v}_D + \overline{L}_D \cdot \overline{\omega},$$

где $\overline{U}_D$ – главный вектор системы сил, $\overline{L}_D$ – главный момент системы сил относительно точки D.

Окончательно имеем

$$W = \overline{U}_D \cdot \overline{v}_D + \overline{L}_D \cdot \overline{\omega}. \tag{5.2}$$

Мощность сил, приложенных к твердому телу, равна сумме скалярных произведений главного вектора на скорость полюса и главного момента относительно полюса на угловую скорость тела.

Для нахождения элементарной работы системы сил можем воспользоваться зависимостью

$$\delta A = W \cdot d\,t = \overline{U} \cdot d\,\overline{r}_D + \overline{L}_D \cdot d\,\overline{\lambda}.$$

Здесь $d\,\overline{r}_D = \overline{v}_D d\,t;\quad d\,\overline{\lambda} = \overline{\omega} d\,t$ – элементарное перемещение полюса и вектор элементарного поворота тела.

Полная работа системы сил

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_{t_1}^{t_2} W\, d\,t.$$

Частные случаи движения твердого тела

Вращение тела вокруг неподвижной оси

Взяв за полюс точку на оси вращения (рис. 5.8), получим

$$W_k = \overline{\omega} \cdot \left(\overline{m}_O \overline{F}_k \right) =$$
$$= \left(\overline{\omega} \right)_z \cdot \left(\overline{m}_O \overline{F}_k \right)_z = \tilde{\omega} \left(\tilde{m}_z \overline{F}_k \right).$$

Мощность силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна алгебраическому произведению угловой скорости тела на момент силы относительно оси вращения.

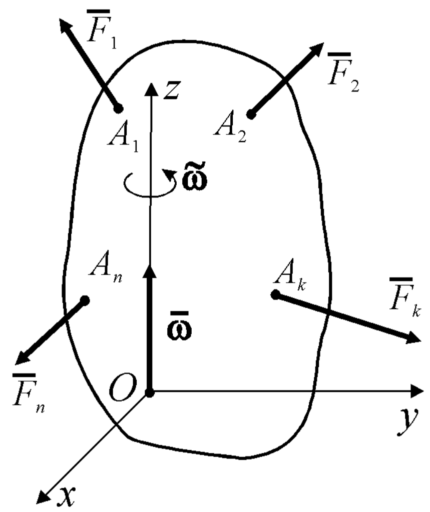

Рис. 5.8

Для системы сил

$$W = \sum_{k=1}^{n} W_k = \tilde{\omega} \sum_{k=1}^{n} \tilde{m}_z \overline{F}_k = \tilde{\omega} \tilde{L}_z .$$

Элементарная работа сил, приложенных к вращающемуся телу, может быть подсчитана по формуле:

$$\delta A = \tilde{L}_z \ \delta \tilde{\varphi} ,$$

где $\delta\tilde{\varphi}$ – элементарный угол поворота тела.

Плоское движение

Если движение тела плоское и система сил $\left\{ \overline{F}_k \right\}_n$ тоже плоская (рис. 5.9), то главный момент системы сил и угловую скорость тела будем рассматривать как величины алгебраические.

Тогда для одной силы

$$W_k = \overline{F}_k \cdot \overline{v}_D + \left(\tilde{m}_D \overline{F}_k \right) \tilde{\omega}.$$

Для системы сил

$$W = \overline{U} \cdot \overline{v}_D + \tilde{L}_D \tilde{\omega}.$$

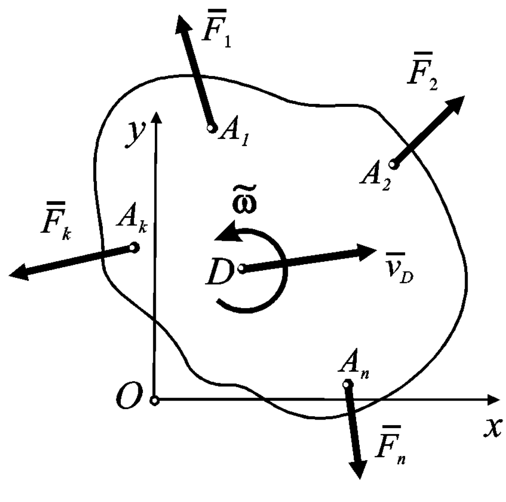

Рис. 5.9

Мощность и элементарная работа пары сил, приложенной к твердому телу

Как известно, главный вектор пары сил $\left(\overline{P},\overline{Q}\right)$ равен нулю, а главный момент пары сил есть момент пары.

Тогда мощность пары сил запишется как

$$W_{PQ} = \overline{m}_{PQ} \cdot \overline{\omega}.$$

Элементарная работа пары сил

$$\delta A = \overline{m}_{PQ} \cdot \delta \overline{\lambda}.$$

Примечание. *Когда речь идет о твердом теле, то учитываем, что работа внутренних сил твердого тела равна нулю, и в число* $\left\{\overline{F}_k\right\}_n$ *входят только внешние силы.*

Пример: однородный диск радиуса r катится без проскальзывания по горизонтальному основанию, имея скорость центра $\overline{v}_C$ и испытывая сопротивление качению. Коэффициент трения качения k. Масса диска m. Найти мощность сил, приложенных к диску.

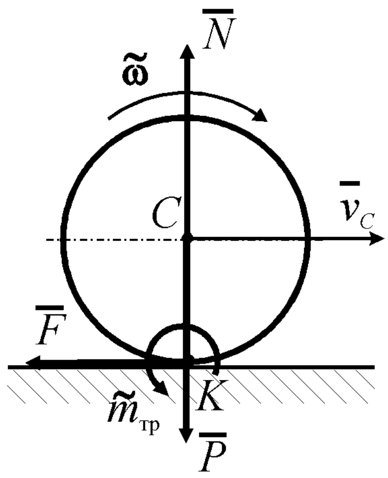

Рис. 5.10

Решение

1. *Рассмотрим движение диска относительно неподвижного основания.*
2. *Заданная сила*: $\overline{P} = m\,\overline{g}$.
3. *Связь*: шероховатая, деформируемая поверхность. Её реакции: $\overline{N}$, $\overline{F}$, $\tilde{m}$.

Диск движется под действием системы внешних сил $\left(\overline{P}\,,\,\overline{N}\,,\,\overline{F}\,,\,\tilde{m}\,\right)$

а) Находим сумму мощностей сил приложенных к диску:

$$W = \overline{P}\cdot\overline{v}_C + \overline{N}\cdot\overline{v}_K + \overline{F}\cdot\overline{v}_K + \tilde{m}\;\tilde{\omega} = -k\,N\,\omega = -k\,m\,g\frac{v}{r}\;.$$

б) Находим мощность сил с помощью формулы (5.2), взяв за полюс точку C:

$$W = \overline{U}_C\cdot\overline{v}_C + \tilde{L}_C\cdot\tilde{\omega} = -\overline{F}\cdot\overline{v}_C - \left(\,m_{\text{тр}} - F\,r\,\right)\omega = -k\,m\,g\frac{v}{r}\;.$$

в) Находим мощность сил с помощью формулы (5.2), взяв за полюс точку K:

$$W = \overline{U}_K\cdot\overline{v}_K + \tilde{L}_k\,\tilde{\omega} = -m_{\text{тр}}\,\omega = -k\,m\,g\,\frac{v}{r}\;.$$

Как и следовало ожидать, результат получается одинаковый.

6. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим движение механической системы $\{A_k\}_n$ точек в пространстве инерциальной системы отсчета $Oxyz$. Пусть m_k – масса точки A_k, $\bar{v}_k$ – ее скорость (рис. 6.1).

Кинетической энергией точки **назовем скалярную величину равную половине произведения массы точки на квадрат ее скорости**

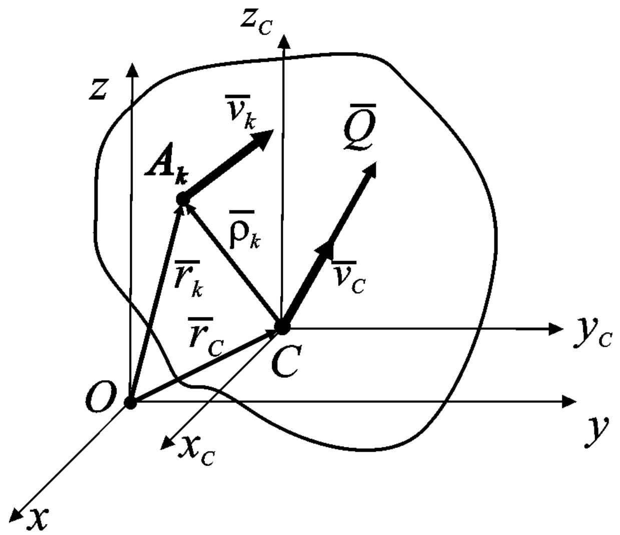

Рис. 6.1

$$T = \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы материальных точек определяется как сумма кинетических энергий точек системы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 .$$

Кинетическая энергия всегда положительная величина. Размерность кинетической энергии $[T] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}$.

Если связать с центром масс пространство Кенига, то

$$\bar{v}_k = \bar{v}_C + \bar{v}_k^r \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_C^2 + \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_C \cdot \bar{v}_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^{r2} .$$

Рассмотрим отдельные слагаемые в последнем выражении:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_C^2 = \frac{v_c^2}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{M v_C^r}{2} = \frac{1}{2} M \bar{v}_C \cdot \bar{v}_C = \frac{1}{2}\bar{Q}\cdot\bar{v}_C ;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_C \cdot \bar{v}_k^r = \bar{v}_C \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k^r = \bar{v}_C \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\bar{\rho}_k}{dt} = \bar{v}_C \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{\rho}_{k.} = 0,$$

так как последняя сумма представляет собой статический момент системы относительно центра масс.

Обозначим $T^r = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \, \overline{v}_k^{r2}$ – *кинетическая энергия в пространстве Кёнига.*

В итоге получим *формулу Кёнига*

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + T^r . \tag{6.1}$$

Кинетическая энергия механической системы складывается из кинетической энергии центра масс, в котором предполагается сосредоточенной вся масса системы и кинетической энергии в пространстве Кенига.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Для твердого тела можем записать

$$T = \frac{1}{2} \int\limits_{(M)} v^2 \, d\,m.$$

Здесь M – масса тела, dm – масса элементарного объема, v –скорость этого объема.

Рассмотрим частные случаи движения твердого тела.

Сферическое движение

При сферическом движении (рис. 6.2)скорость точки найдется как:

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \int\limits_{(M)} \left(\overline{\omega} \times \overline{r} \right)^2 d\,m.$$

Отсюда:

$$\left(\overline{\omega} \times \overline{r} \right)^2 = \left(\overline{\omega} \times \overline{r} \right)\left(\overline{\omega} \times \overline{r} \right) = \overline{v} \cdot \left(\overline{\omega} \times \overline{r} \right) =$$
$$= \overline{\omega} \cdot \left(\overline{r} \times \overline{v} \right) = \overline{\omega} \cdot \Big(\overline{r} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r} \right) \Big).$$

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} \int\limits_{(M)} \overline{\omega} \cdot \left(\overline{r} \times \overline{v} \right) d\,m = \frac{1}{2} \overline{\omega} \int\limits_{(M)} \left(\overline{r} \times \overline{v} \right) d\,m .$$

Или

$$T = \frac{1}{2} \overline{\omega} \cdot \overline{K}_O = \frac{1}{2} \overline{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \, \overline{\omega} = \frac{1}{2} \overline{\omega}^T \, \mathbf{I}_O \, \overline{\omega} \, , \tag{6.2}$$

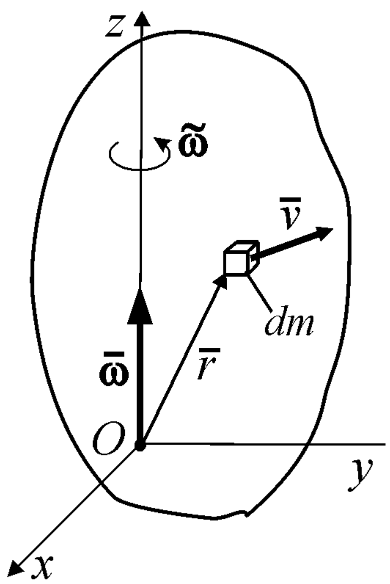

Рис. 6.2

где $\overline{K}_O$– кинетический момент тела относительно неподвижной точки, а $\mathbf{I}_O$ – тензор инерции тела в неподвижной точке.

Вращение тела вокруг неподвижной оси

Рассматривая вращательное движение как частный случай сферического, когда угловая скорость постоянна по направлению и направлена по оси вращения, получаем

$$T = \frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot\overline{K}_O = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\omega} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -I_{xz}\tilde{\omega} \\ -I_{yz}\tilde{\omega} \\ I_z\tilde{\omega} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} I_z\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,\tilde{\omega} K_z. \qquad (6.3)$$

Здесь Oz – ось вращения.

Эту формулу можно получить непосредственно (см. рис. 6.3):

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{(M)} v^2\ d\,m = \frac{1}{2}\int\limits_{(M)} \omega^2 h^2\ d\,m = \frac{\omega^2}{2}\int\limits_{(M)} h^2\ d\,m = \frac{1}{2} I_z\,\omega^2\ .$$

Кинетическая энергия свободного твердого тела

По формуле Кенига имеем

$$T = \frac{1}{2} M\,v_C^2 + T^r\ .$$

Поскольку движение тела в пространстве Кенига сферическое, то

$$T^r = \frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot\overline{K}_C = \frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot\boldsymbol{I}_C\,\overline{\omega}.$$

В итоге получаем

$$T = \frac{M\,v_C^2}{2} + \frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot\mathbf{I}_C\,\overline{\omega}. \qquad (6.4)$$

Или

$$T = \frac{1}{2}\overline{Q}\cdot\overline{v}_C + \frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot\overline{K}_C\,.$$

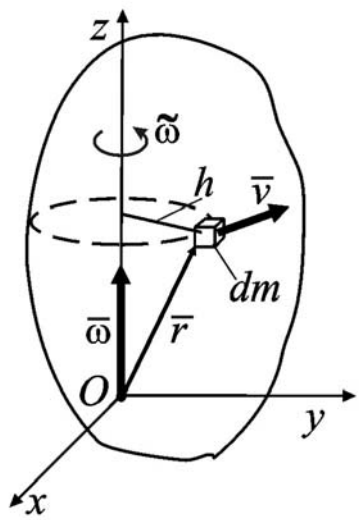

Рис. 6.3

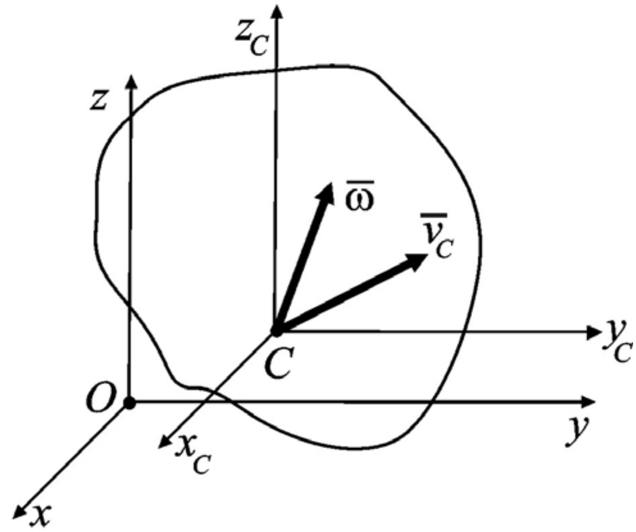

Рис. 6.4

Плоское движение

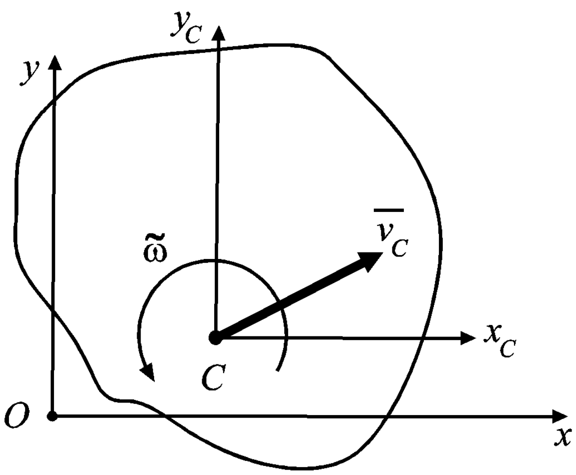

Рис. 6.5

В этом случае движение в пространстве Кенига – это вращение вокруг подвижной оси z проходящей через центр масс C (рис. 6.5).

Следовательно,

$$T^r = \frac{1}{2} I_{zc}\,\omega^2 ,$$

где I_{zc} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс C. В итоге получаем

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{I_{z_C}\,\omega^2}{2} . \qquad (6.5)$$

Поступательное движение

Здесь нет движения в пространстве Кенига, поэтому

$$T_r = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{M v_C^2}{2} . \qquad (6.6)$$

П р и м е р

Найти кинетическую энергию однородного диска радиуса r и массы m, который катится без проскальзывания и имеет скорость центра масс v_C (рис. 6.6).

Решение

Диск совершает плоское движение. По формуле (6.5) будем иметь:

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{I_{z_C} \omega^2}{2}\ ;\ \ I_{z_C} = \frac{m r^2}{2};\ \ \omega = \frac{v}{r}\ .$$

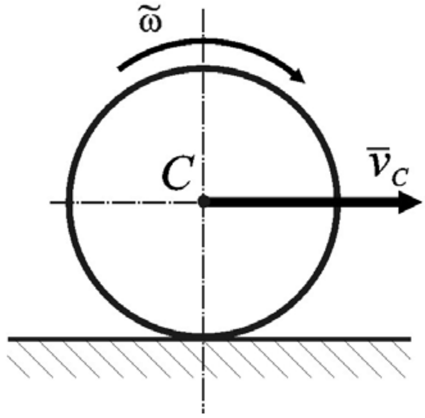

Рис. 6.6

В итоге получим

$$T = \frac{3}{4}\, m v_C^2\,.$$

7. ТЕОРЕМЫ О КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим движение механической системы $\{A_k\}_n$ точек в пространстве инерциальной системы отсчета $Oxyz$ (рис. 7.1).

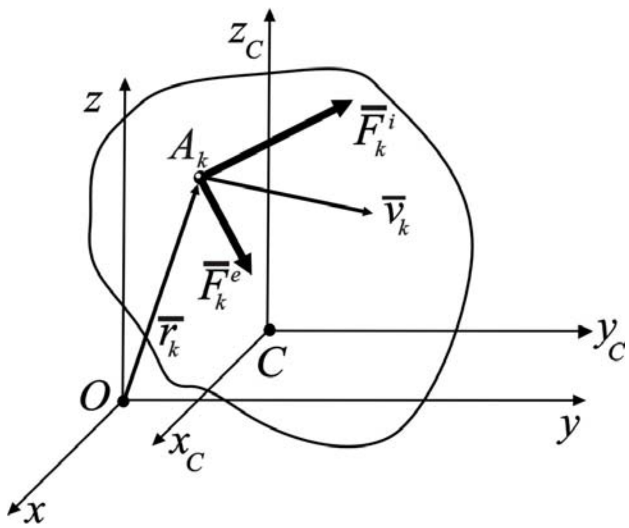

Рис. 7.1

Пусть $\overline{F}_k^e$ – равнодействующая внешних сил, действующих на точку A_k массой m_k, $\overline{F}_k^i$ – равнодействующая внутренних сил.

Запишем для этой точки основное уравнение динамики

$$m_k \frac{d\,\overline{v}_k}{d\,t} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i\,.$$

Умножим это уравнение скалярно на $d\,\overline{r}$. Получим

$$m_k\, d\,\overline{r} \cdot \frac{d\,\overline{v}_k}{d\,t} = \overline{F}_k^e \cdot d\,\overline{r} + \overline{F}_k^i \cdot d\,\overline{r}\,,$$

или

$$m_k\ \frac{d\,\overline{r}}{d\,t} \cdot d\,\overline{v}_k = \delta\, A_k^e + \delta\, A_k^i\ \ .$$

Иначе

$$d\left(\frac{m v_k^2}{2}\right) = \delta A_k^e + \delta A_k^i \ .$$

Таким образом,

$$d T_k = \delta A_k^e + \delta A_k^i \ .$$

Суммируя последнее уравнение по всем точкам системы, получим

$$d T = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^e + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^i \ . \tag{7.1}$$

Это *теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме*: **приращение кинетической энергии механической системы на элементарном перемещении равно элементарной работе внешних и внутренних сил, действовавших на точки механической системы на этом перемещении.**

Разделив (7.1) на $d t$ будем иметь:

$$\frac{d T}{d t} = \sum_{k=1}^{n} W_k^e + \sum_{k=1}^{n} W_k^e \ . \tag{7.2}$$

Нами получена *теорема о производной кинетической энергии по времени (теорема о* $\frac{d T}{d t}$): **производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на точки механической системы.**

Проинтегрировав обе части уравнения (7.1) на некотором перемещении из положения I в положение II, получим

$$T_{\mathrm{II}} - T_{\mathrm{I}} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,\mathrm{I},\mathrm{II}}^e + \sum_{k=1}^{n} A_{k,\mathrm{I},\mathrm{II}}^i \ . \tag{7.3}$$

Это *теорема о кинетической энергии в интегральной форме*: **приращение кинетической энергии механической системы на конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил системы на этом перемещении.**

Теорема о кинетической энергии в пространстве Кенига

Рассмотрим движение механической системы $\{ A_k \}_n$ точек. Свяжем с центром масс системы пространство Кенига (рис. 7.2).

По теореме о кинетической энергии (7.1) имеем

$$dT=\sum_{k=1}^{n}\delta A^{e}+\sum_{k=1}^{n}\delta A^{i}=\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{k}^{e}\cdot d\,\overline{r}_{k}+\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{k}^{i}\cdot d\,\overline{r}_{k}\,.$$

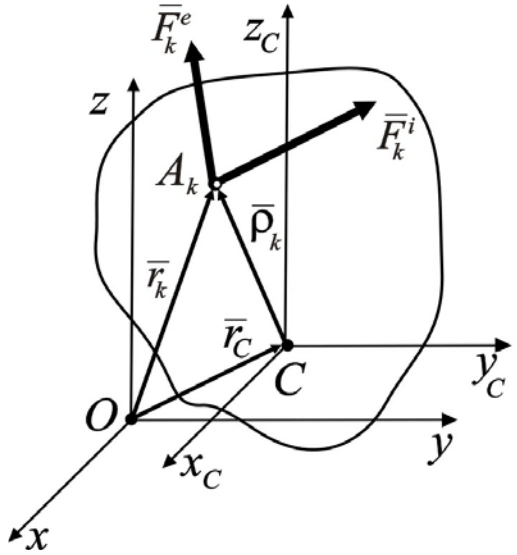

Рис. 7.2

В соответствии с формулой Кенига получим

$$dT=dT^{r}+d\left(\frac{Mv_{c}^{2}}{2}\right).$$

Суммы элементарных работ с учетом того, что $\overline{r}_k=\overline{r}_c+\overline{\rho}_k$, запишутся в виде:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A^{e}=\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{k}^{e}\cdot d\,\overline{r}_{C}+\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{k}^{e}\cdot d\,\overline{\rho}_{k}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A^{i}=\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{k}^{i}\cdot d\,\overline{r}_{c}+\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{k}^{i}\cdot d\,\overline{\rho}_{k}$$

Учтем, что $d\,\overline{r}_C$ можно вынести из-под знака суммы.

Кроме того, обозначим:

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{k}^{e}\cdot d\overline{\rho}_{k}=\sum_{k=1}^{n}\delta A^{er}\,,\quad \sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{k}^{i}\cdot d\overline{\rho}_{k}=\sum_{k=1}^{n}\delta A_{k}^{ir}$$

– работы внешних и внутренних сил в пространстве Кёнига.

Заметим также, что $\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{k}^{i}=0$.

Кроме того, запишем

$$d\left(\frac{Mv_{c}^{2}}{2}\right)=M\,\overline{v}_{c}\cdot d\,\overline{v}_{c}=M\,\frac{d\,\overline{v}_{c}}{d\,t}\cdot\overline{v}_{c}\,d\,t=d\,\overline{r}_{c}\cdot\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{k}^{e}\,,$$

поскольку по теореме о движении центра масс

$$M\,\frac{d\,\overline{v}_{c}}{d\,t}=\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{k}^{e}\,,$$

В итоге получим

$$d\,\overline{T}^{\,r}+d\,\overline{r}_{c}\cdot\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{k}^{e}=\sum_{k=1}^{n}\delta A_{k}^{re}+\sum_{k=1}^{n}\delta A_{k}^{ri}+d\,\overline{r}_{c}\cdot\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_{k}^{e}\,,$$

или

$$d\overline{T}^{r} = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{re} + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{ri}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии в пространстве Кенига формулируется так же, как и для абсолютного пространства.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Теоремой о кинетической энергии удобно пользоваться в том случае, когда система является неизменяемой. В этом случае можно исключить из рассмотрения все неизвестные внутренние силы.

Теорему об изменении кинетической энергии применяют там, где силы постоянны или зависят от положения, и нужно определить скорость в начале или в конце перемещения или путь, пройденный телом.

Теорему о $\dfrac{dT}{dt}$ очень удобно применять для нахождения ускорения системы.

Пример

В маятнике Максвелла однородный цилиндр весом P и радиусом R, падая вниз без начальной скорости разматывает нить. Определить скорость оси цилиндра в зависимости от высоты его опускания. Весом нити пренебречь.

Решение

1. *Рассмотрим движение цилиндра в пространстве неподвижного основания.*
2. *Заданная сила*: сила тяжести цилиндра $\overline{G}$.
3. *Связь*: нить, её реакция $\overline{S}$.
4. *Цилиндр движется под действием сил*

$$\left(\overline{S},\, \overline{G}, \left\{\overline{F}_k^{i}\right\}_n\right).$$

5. *Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме*

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^{e} + \sum_{k=1}^{n} A_k^{i}.$$

Сумма работ внутренних сил абсолютно твердого цилиндра

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{i} = 0.$$

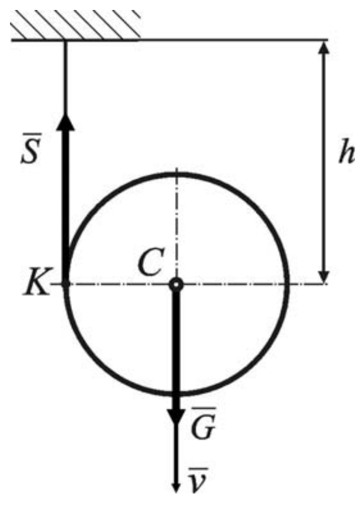

Рис. 7.5

Сумма работ внешних сил

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = A_G + A_S = Gh + 0,$$

Кинетическая энергия

$$T_0 = 0, \quad T = \frac{3}{4}\frac{G}{g} v_C^2 .$$

Отсюда получим

$$\frac{3}{4}\frac{G}{g} v_C^2 = G\,h, \quad \Rightarrow \quad v_C = \frac{2}{3}\sqrt{3gh} .$$

8. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ СИЛОВОЕ ПОЛЕ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ СИЛОВОЕ ПОЛЕ

Область пространства, в которой на материальную точку, в нее помещенную, действует сила, зависящая только от положения точки и, может быть, времени, называется *силовым полем*.

Например: поле тяготения планеты, электрическое поле заряженной частицы и т.д.

Говорят, что поле *стационарно*, если рассматриваемые силы не зависят явно от времени. В противном случае поле называется *нестационарным.*

Сила нестационарного поля записывается как функция координат и времени:

$$\overline{F} = \overline{F}\left(x,\, y,\, z\,,\, t\,\right).$$

Если сила поля – функция только координат, $\overline{F} = \overline{F}\left(x,\, y,\, z\,\right)$ – то поле стационарное.

Элементарная работа силы поля запишется в виде

$$\delta A = F_x\, d\,x + F_y\, d\,y + F_z\, d\,z .$$

Если сила представляет собой градиент некоторой функции $U\left(x,\, y,\, z\,\right)$, то такое поле называется потенциальным, а сама функция U – потенциалом или силовой функцией поля:

$$\overline{F} = \mathrm{grad}\,U = \nabla U ,$$

или

$$\overline{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = F_x\,\bar{i} + F_y\,\bar{j} + F_z\,\bar{k}\ .$$

Можем записать:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Элементарная работа потенциальной силы равна полному дифференциалу от силовой функции:

$$\delta A = \overline{F} \cdot d\,\bar{r} = F_x\ d\,x + F_y\ d\,y + F_z\ d\,z = \frac{\partial U}{\partial x}d\,x + \frac{\partial U}{\partial y}d\,y + \frac{\partial U}{\partial z}d\,z = d\,U\,,$$

или

$$\delta\,A = d\,U\,.$$

Направление сил поля характеризуется *силовыми линиями*, т.е. **линиями, касательная в каждой точке которой совпадает с направлением силы, действующей в этой точке**. Через каждую точку поля можно провести лишь одну силовую линию (рис. 8.1).

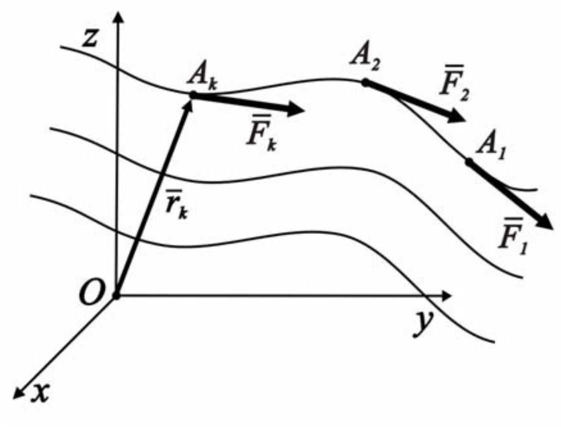

Рис. 8.1

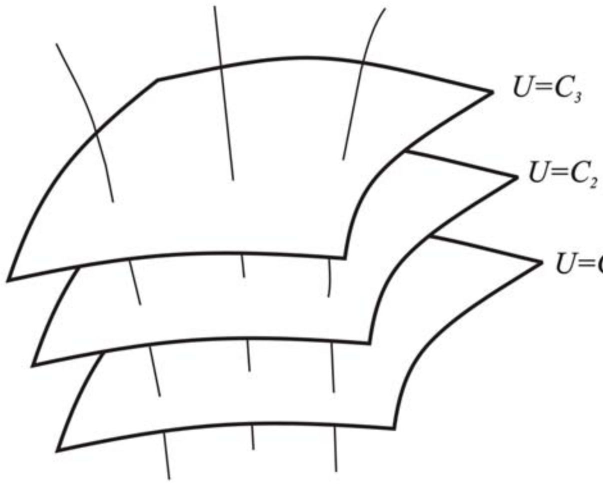

Рис. 8.2

Т.к. вектор $d\,\bar{r}$ при движении вдоль силовой линии направлен по касательной, то для силовой линии

$$d\,\bar{r} \parallel \overline{F}\,, \qquad \text{иначе} \qquad \frac{d\,x}{F_x} = \frac{d\,y}{F_y} = \frac{d\,z}{F_z}.$$

Это – дифференциальные уравнения силовой линии.

Поверхность $U\left(x,\,y,\,z\right) = \mathrm{const}$, **на которой силовая функция сохраняет постоянное значение, называется** *эквипотенциальной поверхностью,* или *поверхностью равного потенциала*

Для данного поля эти поверхности образуют семейство (рис. 8.2). В случае однозначности эти поверхности не могут пересекаться и будут разделять силовое поле на слои, поэтому такое поле называется *слоистым* или *пластинчатым*.

Одну из эквипотенциальных поверхностей условно принимают за нулевую и называют поверхностью нулевого потенциала или поверхностью нулевого уровня. На поверхности нулевого уровня $U(x,\ y,\ z)=0$.

Силовые линии ортогональны к эквипотенциальным поверхностям, поскольку на поверхности уровня

$$dU=\delta A=0,$$

или

$$\overline{F}\cdot d\overline{r}=0,\quad \overline{F}\perp d\overline{r},$$

где $d\overline{r}$ берется вдоль поверхности уровня.

Сила поля направлена по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания силовой функции.

РАБОТА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СИЛЫ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Работа силы поля на конечном перемещении точки из положения M_1 в положение M_2

$$A_{M_1M_2}=\int_{M_1}^{M_2}\delta A=\int_{M_1}^{M_2}dU=U_2-U_1.$$

Следовательно, работа потенциальной силы равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути и не зависит от вида траектории, по которой перемещается точка. В частности, работа потенциальной силы при перемещении по замкнутому контуру равна нулю.

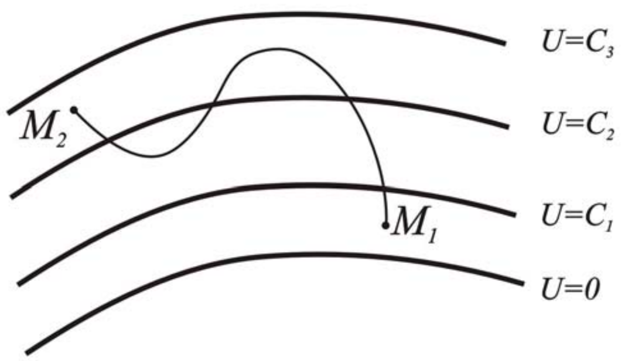

Рис. 8.3

Для потенциального силового поля можно ввести понятие о ***потенциальной энергии***, как о величине, характеризующей *«запас работы»*, которым обладает точка в данном месте силового поля.

Потенциальной энергией точки в данном положении M называется скалярная величина, равная той работе, которую произведут силы поля при перемещении точки из занимаемого ею положения M на нулевую поверхность уровня

$$П = A_{MM_0} = U_0 - U = -U, \text{ так как } U_0 = 0.$$

Потенциальная энергия характеризует способность силового поля совершать работу:

$$\delta A = dU = -d\,П,$$

$$A_{M_1 M_2} = -\int_{M_1}^{M_2} d\,П = П_1 - П_2.$$

Работа потенциальной силы равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положениях движущейся точки, или *падению потенциальной энергии.*

Для механической системы потенциальная энергия $П$ равна сумме потенциальных энергий ее точек:

$$П = \sum_{i=1}^{n} П_i = \sum_{i=1}^{n} A_{M_i M_{i0}}.$$

Пример 1. ***Однородное поле тяжести***

Если точка движется вблизи поверхности Земли, то сила поля тяжести $\overline{P} = m\,\overline{g}$, т.е., если ось ζ вертикальна, а оси ξ и η горизонтальны (рис. 8.4), будем иметь:

$$P_\xi = P_\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad P_\zeta = -mg = \text{const}.$$

Элементарная работа силы тяжести

$$\delta A = -mg\; d\zeta = dU.$$

Силовая функция найдется как

$$U = \int dU = -mg\zeta + \text{const}.$$

Константу найдем из начальных условий:

$$\zeta = 0 \quad \Rightarrow \quad U_0 = 0 \quad \Rightarrow U = -mg\zeta,$$

где ζ – высота точки над поверхностью нулевого уровня.

Потенциальная энергия поля силы тяжести:

$$П = -U = mg\zeta,$$

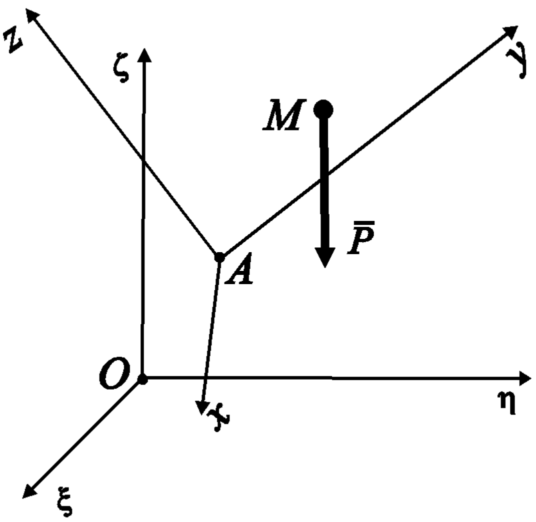

Рис. 8.4

Эквипотенциальные поверхности

$$U = \text{const} \;\Rightarrow\; \zeta = \text{const}.$$

Уравнения силовых линий:

$$\frac{d\zeta}{-mg} = \frac{d\xi}{0} = \frac{d\eta}{0},$$

или

$$\left.\begin{aligned} -mg\,d\xi = 0 \quad &\Rightarrow \quad d\xi = 0 \\ -mg\,d\eta = 0 \quad &\Rightarrow \quad d\eta = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \xi = \text{const}, \quad \eta = \text{const},$$

т.е. силовые линии представляют собой вертикали.

Для системы координат $Axyz$, если можно выразить $\zeta = \zeta(x, y, z)$, получим в проекциях на оси:

$$\overline{P} = \text{grad}\, U = -mg\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\overline{k}\right).$$

Пример 2. ***Поле центральной силы***

Центральной называется сила, проходящая через некоторый неподвижный центр.

Пусть, $\overline{r}$ – радиус-вектор точки приложения центральной силы, а r – модуль этого вектора (рис. 8.5).

Тогда силу можно представить в виде

$$\overline{F}(r) = -F(r)\,\frac{\overline{r}}{r}.$$

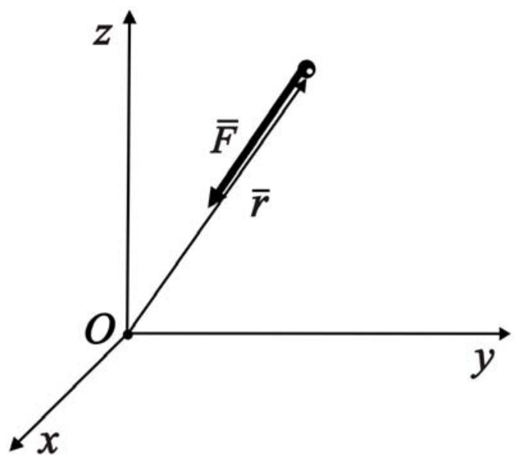

Рис. 8.5

Элементарная работа силы:

$$\delta A = \overline{F}(r)\cdot d\overline{r} = -\frac{F(r)}{r}\overline{r}\cdot d\overline{r} =$$

$$= -\frac{F(r)}{2r}d(\overline{r}\cdot\overline{r}) = -\frac{F(r)}{2r}d\,r^2 = -F(r)\,dr$$

Здесь dr – приращение модуля радиуса-вектора.

Силовая функция центральной силы записывается как

$$U = -\int F(r)\,dr + \text{const}.$$

Частные случаи центральной силы

а. Пусть $F(r)=\frac{k}{r^2}$ – *сила земного тяготения*, если начало координат берется в центре Земли.

При r, равном радиусу Земли R получаем

$$r=R \Rightarrow F=mg \Rightarrow k=mgR^2.$$

Теперь

$$F(r)=\frac{mgR^2}{r^2} \Rightarrow dU=-\frac{mgR^2}{r^2}\,dr,$$

или

$$U=\frac{mgR^2}{r}+\mathrm{const}.$$

Эквипотенциальные поверхности представляют собой сферы: $r=\mathrm{const}$.

Пусть при $r=R$ силовая функция равна нулю:

$$U=U_0=0 \Rightarrow U=\frac{mgR^2}{r}-mgR.$$

Потенциальная энергия найдется как

$$\varPi=-U=mgR-\frac{mgR^2}{r}=mgR\left(1-\frac{R}{r}\right).$$

При малом расстоянии от поверхности Земли, равном h, получаем

$$r=R+h \Rightarrow \varPi=mgR\left(1-\frac{R}{R+h}\right)=mgR\left(\frac{h}{R+h}\right)\approx mgh.$$

Здесь принято, что

$$R\approx R+h.$$

б. ***Потенциальная энергия пружины*** (рис. 8.6)

Пусть в точке M_0 пружина нерастянута, тогда

$$F(r)=c(r-r_0).$$

Элементарная работа силы пружины равна:

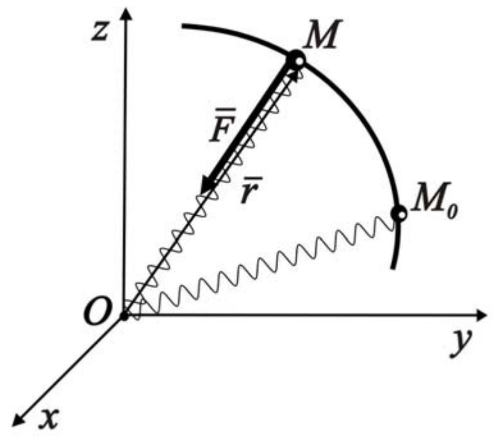

Рис. 8.6

$$\delta A = -c(r - r_0)dr\ .$$

Силовая функция этой силы:

$$U = -\int c(r - r_0)\,dr = -\frac{c(r - r_0)^2}{2} = -\frac{c\lambda^2}{2},$$

где $\lambda = r - r_0$.

Потенциальная энергия пружины найдется как

$$\Pi = \frac{c\lambda^2}{2}.$$

9. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Пусть все действующие на систему силы как внешние, так и внутренние потенциальны, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_{F_k} = -d\,\Pi.$$

По теореме о кинетической энергии в дифференциальной форме имеем

$$dT = \sum_{k=1}^{n} \delta A_{F_k} = -d\,\Pi$$

или

$$dT + d\,\Pi = 0.$$

Иначе

$$T + \Pi = E = \text{const}.$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии называется ***механической энергией.***

При движении механической системы в потенциальном поле внешних и внутренних сил полная механическая энергия системы остается постоянной величиной.

Механические системы, для которых выполняется этот закон, называются ***консервативными.***

Пример

Груз массой m подвешен на пружине жесткости c (рис. 9.1). В начальный момент покоящемуся грузу сообщена скорость v_0. Найти закон изменения скорости в зависимости от координаты.

Решение

1. *Рассмотрим движение груза*. Начало координат выберем в положении статического равновесия груза.
2. *Заданные силы* $\overline{P}, \overline{F}$; $P = mg$, $F = c(x+\delta)$,

где δ – статическое удлинение пружины под действием силы тяжести груза:

$$\delta = \frac{mg}{c} \Rightarrow F = c\left(x + \frac{mg}{c}\right) = cx + P.$$

3. *Связей* нет.
4. *Груз движется под действием сил*: $(\overline{F}, \overline{P})$.
5. *Для решения задачи воспользуемся законом сохранения механической энергии*

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0.$$

Начальное значение кинетической энергии

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Начальное значение потенциальной энергии складывается из потенциальной энергии груза $\Pi_P = 0$, если поверхность нулевого уровня взять в положении статического равновесия, и потенциальной энергии пружины, которая найдется как

$$\Pi_F = \frac{c\delta^2}{2}.$$

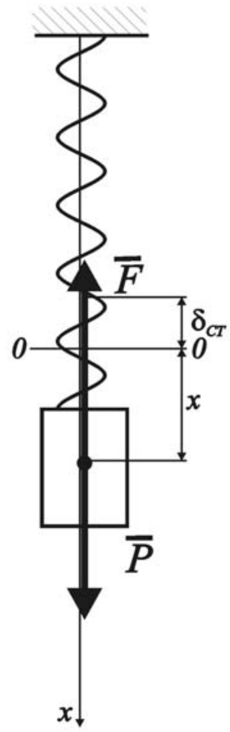

Рис. 9.1

$$\Pi_0 = \Pi_P + \Pi_F = 0 + \frac{c\delta^2}{2} = c \cdot \frac{m^2 g^2}{c^2} = \frac{m^2 g^2}{c}.$$

Текущие значения кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \quad \Pi = -mgx + \frac{c(x+\delta)^2}{2}.$$

В итоге имеем

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - mgx + \frac{c(x+\delta)^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{c\delta^2}{2},$$

откуда

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - m g x + \frac{c\,x^2}{2} + c\delta x = \frac{m v_0^2}{2},$$

или

$$\dot{x}^2 = \left[\, x\big(\, m g - c\delta\,\big) - \frac{c\,x^2}{2}\,\right]\frac{2}{m} + v_0^2\ .$$

Подставляя значение δ, получаем

$$\dot{x}^2 = \left[\, x\left(\, m g - \frac{c\cdot m g}{c}\,\right) - \frac{c\,x^2}{2}\,\right]\frac{2}{m} + v_0^2\ .$$

Окончательно будем иметь

$$\dot{x}^2 = v_0^2 - \frac{c\,x^2}{2}\cdot\frac{2}{m} \quad\Rightarrow\quad \dot{x} = \sqrt{v_0^2 - \frac{c}{m}\,x^2}\ .$$

10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Одним из методов описания динамики движения твердого тела является составление дифференциальных уравнений этого движения, связывающих обобщенные координаты тела и действующие на тело силы.

Как известно, движение твёрдого тела можно описать, взяв какую-либо точку тела за полюс и связав с ней подвижную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно неподвижной системы отсчета. Тогда движение тела описывается шестью уравнениями: три уравнения описывают движение полюса и три – вращение тела вокруг полюса. Если за полюс взять центр масс, то подвижной системой отсчета будет пространство Кёнига.

Для описания движения центра масс воспользуемся теоремой о движении центра масс:

$$M\,\ddot{\bar{r}}_C = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^{\,e}\ . \tag{10.1}$$

Для описания сферического движения тела вокруг центра масс воспользуемся теоремой о кинетическом моменте относительно центра масс:

$$\frac{d\,\bar{K}_C^{\,r}}{d\,t} = \sum_{k=1}^{n} \overline{mom}_C\ \bar{F}_k^{\,e}\ . \tag{10.2}$$

Для замыкания этой системы необходимо знать начальное положение и начальную скорость тела.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

а. Поступательное движение

Все точки тела движутся одинаково. Движение в пространстве Кёнига отсутствует. Движение тела можно описать уравнением (10.1):

$$M\ddot{\overline{r}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e .$$

Начальные условия:

$$\overline{r}_C = \overline{r}_{C0}, \quad \dot{\overline{r}}_C = \overline{v}_0 .$$

б. Вращение тела вокруг неподвижной оси

В этом случае тело имеет одну степень свободы. Обобщенная координата – угол поворота тела φ. Для нахождения зависимости обобщенных координат от действия на тело сил можно воспользоваться теоремой о кинетическом моменте относительно оси вращения тела:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} mom_z \overline{F}_k^e .$$

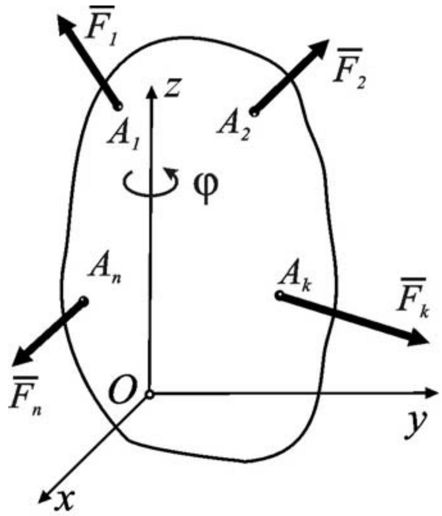

Рис. 10.1

Кинетический момент вращающегося тела находится по формуле (3.11)

$$K_z = \left(\overline{K}_O\right)_z = I_z \tilde{\omega}.$$

Дифференцируя эту зависимость по времени, получаем *дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси*:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} mom_z \overline{F}_k^e \quad . \qquad (10.4)$$

Начальные условия: $t = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_0; \quad \dot{\phi} = \tilde{\omega}_0 .$

Решая уравнение (10.4) при соответствии начальных условиях найдем закон вращения тела вокруг неподвижной оси.

в. Плоское движение

Здесь движение тела в пространстве Кёнига будет вращательным вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс, поэтому уравнение (10.2) можно представить в виде

$$\frac{dK_{zC}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} mom_{zC}\,\overline{F}_k^e\ ,$$

или

$$I_{zC}\,\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} mom_{zC}\,\overline{F}_k^e\ ,$$

так как положение центра масс в теле не меняется.

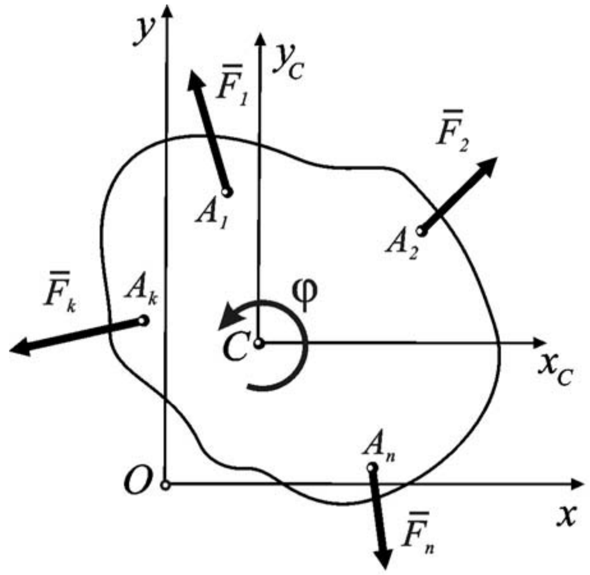

Рис. 10.2

Дифференциальные уравнения плоского движения можно записать в виде

$$\begin{cases} M\,\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \\ M\,\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \\ I_{zC}\,\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{mom}_C\,\overline{F}_k\,. \end{cases} \qquad (10.3)$$

В последнем уравнении учитывается, что по определению момент силы относительно оси есть алгебраический момент проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Начальные условия: при $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_C = x_{C0}, & \dot{x}_C = \dot{x}_{C0,} \\ y_C = y_{C0}, & \dot{y}_C = \dot{y}_{C0}, \\ \varphi = \varphi_0, & \dot{\varphi} = \varphi_0. \end{cases}$

Пример 1. ***Физический маятник***

Физическим маятником называется тяжелое твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием собственного веса. Ось вращения называют *осью привеса* маятника.

Дано: Маятник весом G качается около оси O; C – центр масс.

Найти закон малых качаний маятника.

Решение

Воспользуемся дифференциальным уравнением вращения маятника

$$I_O \ddot{\varphi} = -G d \sin \varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{G d}{I_O} \sin \varphi = 0,$$

где I_O – момент инерции маятника относительно точки O .

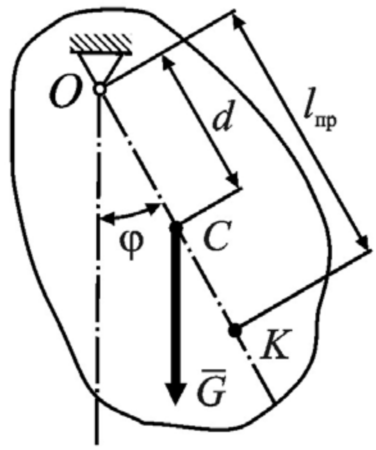

Рис. 10.3

Пусть

$$\frac{G d}{I_O} = k^2,$$

тогда получим

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0.$$

В случае малых качаний $\sin \varphi \approx \varphi$ и последнее уравнение приобретает вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\varphi = A \sin k t + B \cos k t.$$

Если в начальный момент $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, то $A = 0,$ $B = \varphi_0$ и в итоге

$$\varphi = \varphi_0 \cos k t.$$

Период $\tau_ф$ малых качаний маятника

$$\tau_ф = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{G d}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_C}{m g d} + \frac{d}{g}}.$$

Малые качания физического маятника являются изохронными гармоническими колебаниями.

Полученные результаты можно распространить и на математический маятник, т.е. груз малых размеров на невесомой нити длиной $l_м$. Для него

$$I_O = ml_{\text{м}}^2 = \frac{G}{g} l_{\text{м}}^2 \,; \quad \tau_{\text{м}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{м}}}{g}} \,.$$

При $\tau_{\text{м}} = \tau_{\text{ф}}$ получаем

$$\frac{l_{\text{м}}}{g} = \frac{I_C}{mgd} + \frac{d}{g} \quad \Rightarrow \quad l_{\text{м}} = \frac{I_C}{md} + d \,.$$

Приведенная длина физического маятника есть длина математического, период качаний которого одинаков с периодом физического:

$$l_{\text{пр}} = l_{\text{м}} = \frac{I_C}{md} + d \,, \quad \text{т.е.} \quad l_{\text{пр}} > d \,.$$

Точка K на прямой OC, отстоящей на расстоянии $OK = l_{\text{пр}}$, называется *центром качаний* маятника. Можно показать, что если ось привеса будет проходить через точку K, то период качаний останется прежним, а центром качаний будет точка O. Следовательно, точки K и O будут взаимными.

В самом деле, при центре качаний в т. O период найдется как

$$\tau_O = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{gmd}} \,,$$

а при центре качаний в т. K

$$\tau_K = 2\pi \sqrt{\frac{I_K}{gm(l-d)}} \,.$$

Нетрудно видеть, что $\tau_K = \tau_O$, поскольку

$$\frac{I_O}{d} = \frac{I_K}{(l-d)} .$$

Действительно,

$$I_O = I_C + md^2 \text{, а } I_K = I_C + m(l-d)^2 .$$

Получаем

$$\frac{I_C + md^2}{md} = \frac{I_C + m(l-d)^2}{m(l-d)} ,$$

или

$$\frac{I_C}{md} + d = \frac{I_C d}{I_C} + \frac{I_c}{md},$$

В частности, можно записать:

$$l - d = \frac{I_c}{md}.$$

Пример 2

Однородный диск массой m и радиусом r может катиться по горизонтальной плоскости. К оси диска приложена сила $\overline{P}$. Коэфициент трения качения k, коэфициент трения скольжения f.

Найти закон движения диска.

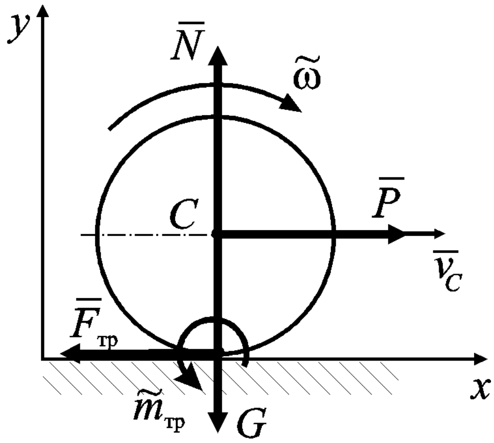

Рис. 10.4

Решение

1. *Рассмотрим движение диска в пространстве неподвижного основания, полагая, что проскальзывания диска по основанию нет.*
2. *Заданные внешние силы*:
$$\overline{P},\, \overline{G}.\quad P = mg.$$
3. *Связь*: шероховатое деформируемое основание. Её реакции: $\overline{N},\, \tilde{m}_{\text{тр}},\, \overline{F}_{\text{тр}}$.
4. *Диск движется под действием внешних сил:* $\left(\overline{P}, \overline{G}, \overline{N}, \tilde{m}_{\text{тр}}, \overline{F}_{\text{тр}}\right)$.
5. *Дифференциальные уравнения движения имеют вид*:
$$m\ddot{x}_C = P - F\ ,\qquad m\ddot{y}_C = N - mg,\qquad I_{zC}\,\ddot{\varphi} = -F_{\text{тр}}\, r + m_{\text{тр}}.$$

Неизвестных 6 – x_C, y_C, φ, $F_{\text{тр}}$, $m_{\text{тр}}, N$ и всего 3 уравнения.

Дополнительные условия:

1. $y_C = \text{const} = r,\quad \ddot{y}_C = 0$;
2. при отсутствии скольжения $v_C = \left|\dot{x}_C\right| = r\,\omega = -r\,\dot{\varphi}$ (знак отрицательный, так как при $x_c > 0$ вращение происходит по часовой стрелке);
3. при наличии качения $m_{\text{тр}} = k\,N$.

В итоге имеем

$$\ddot{y}_c = 0,\; N = mg,\; m_{\text{тр}} = kmg.$$

Из последнего уравнения движения получаем

$$\ddot{\varphi} = \frac{kmg - F_{\text{тр}}\, r}{I_{zC}} = \frac{2\left(kmg - F_{\text{тр}}\, r\right)}{m r^2}\ .$$

Подставляя это значение в первое уравнение движения, имеем

$$\ddot{x} = -r\ddot{\varphi} = -\frac{2\left(kmg - F_{\text{тр}} r\right)}{m r} = -2\left(\frac{kg}{r} - \frac{F_{\text{тр}}}{m}\right).$$

В итоге для силы трения скольжения получим

$$F_{\text{тр}} = \frac{P}{3} + \frac{2\,kmg}{3r}\,.$$

Знак положительный, значит направление $F_{\text{тр}}$ выбрано правильно.

Выясним, при каких значениях f рассматриваемое движение будет происходить без проскальзывания.

Условие отсутствия проскальзывания: $F_{\text{тр}} < f\,N$.

Иначе

$$\frac{P}{3} + \frac{2\,kmg}{3r} < fmg\,, \text{ или } f > \frac{P}{3mg} + \frac{2k}{3r}.$$

Значит, чем больше значение силы P, тем больше должен быть коэффициент трения скольжения f, чтобы не было проскальзывания.

ОГЛАВЛЕНИЕ