Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

А.Н. Виноградов, Н.Н. Пилюгина, О.П. Феоктистова

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
1994

ББК 22.2I
В49

Рецензент Г.А.Тимофеев

В49 Виноградов А.Н., Пилюгина Н.Н., Феоктистова О.Н.
Кинематика точки и простейшие движения твердого тела: Методические указания. – М.: Изд-во МГТУ, 1994. – 39 с., ил.

ISBN 5-7038-1216-X

Представлен раздел курсовой работы по курсу "Теоретическая механика". Даны 32 варианта курсовой работы и примеры их выполнения.

Для студентов I-го курса машиностроительных и приборостроительных специальностей.

Ил. I2. Библиогр. 2 назв.

ББК 22.2I

ISBN 5-7038-1216-X

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Данный раздел курсовой работы по теоретической механике позволяет студенту закрепить основные понятия кинематики точки и простейших движений твердого тела.

Каждому варианту работы соответствует рисунок с графическим изображением механизма (I...5 – звенья механизма). Закон движения звена I, которое является ведущим, задан. В вариантах № I; 2; 4; II; I2; I3, I5; I6; I9 звено I движется поступательно. В вариантах № 3; 5...I0; I4; I7; I8; 20...32 движение звена I вращательное [I, 2].

На одном из звеньев механизма указана точка M. В вариантах I... 9; 2I; 22; 24; 25, 27...29 задан закон движения точки M относительно звена I уравнением $r(t)$. В вариантах I0...20; 23; 26; 30...32 точка M принадлежит звену.

Начало и положительное направление отсчета координат $S(t)$, $\varphi(t)$, $r(t)$ указаны на рисунках. В точках соприкосновения звеньев механизма проскальзывание отсутствует, нити и ремни считаются нерастяжимыми. На рисунках приведены схемы механизмов и исходные данные для всех вариантов задания, единицы измерения исходных величин: длина – метр, время – секунда, угол – радиан.

Кинематика точки

Необходимо исследовать движение точки и определить характеристики ее движения.

I. Установить способ задания движения точки M и записать кинематические уравнения ее движения.

2. Найти траекторию движения точки M в заданной системе координат.

Для момента времени $t = t_1$

3. Найти скорость и ускорение точки M в заданной системе координат.

4. Определить проекции скорости и ускорения точки M на оси естественного трехгранника [I].

5. Найти проекции скорости и ускорения точки M в полярной системе координат (их радиальную и трансверсальную составляющие). При этом начало полярной системы координат нужно поместить в начало декартовой, направив полярную ось по оси Ox.

6. В выбранном масштабе сделать чертеж с изображением траектории точки M. На чертеже указать все компоненты скорости и ускорения точки M в момент $t = t_1$.

7. На ЭВМ построить графики зависимостей всех параметров движения от времени в интервале от 0 до 2 с.

Кинематика простейших движений твердого тела

Требуется изучить движение отдельных звеньев механизма.

I. Установить характер движения звеньев механизма.

Для момента времени $t = t_1$.

2. Определить угловые скорости и угловые ускорения звеньев механизма, совершающих вращательное движение, указав на чертеже круговыми стрелками их направления.

3. Для точек A_i контакта звеньев определить скорости, ускорения и их векторы, изобразив на схеме механизма в соответствующем масштабе полученные величины.

Примечания.

I. Радиус i-го зубчатого колеса обозначен R_i, радиус ступени колеса – r_i.

2. Законы движения звеньев в ряде механизмов справедливы для ограниченного промежутка времени, включающего момент $t = t_1$.

3. Траекторию точки M в полярных координатах построить при изменении угла φ в пределах от 0 до $\pi/2$.

4. Пункт 7 выполняется по указанию преподавателя.

5. Кинематическими характеристиками тела при вращении его вокруг оси z являются: φ – угол поворота тела (положительное направление отсчета угла φ принято против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси z);

$\bar{\omega}$ – угловая скорость тела – скользящий вектор $\bar{\omega} = \omega_z \bar{k}_0$, где $\bar{k}_0$ - единичный орт оси z, $\omega_z = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ – проекция вектора $\bar{\omega}$ на ось z. На рисунках направление угловой скорости

условно отмечено круговой стрелкой; $\bar{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела – скользящий вектор; $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_z \bar{k}_0$, где ε_z – проекция вектора $\bar{\varepsilon}$ на ось z:

$$\varepsilon_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega_z}{dt} = \ddot{\varphi}.$$

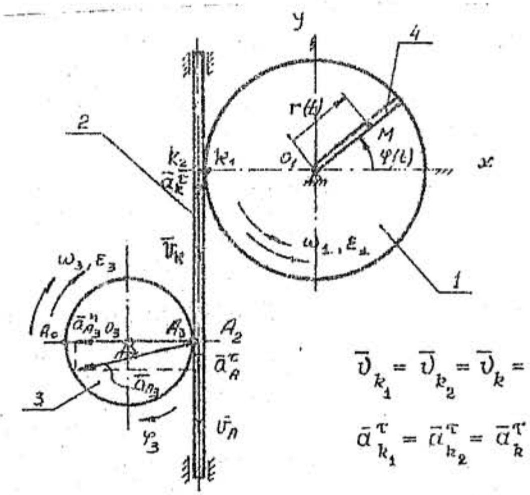
Положительное направление отсчета углового ускорения такое же, как и для угловой скорости тела.

Пример № I

Зубчатое колесо I радиуса R_1 = I м вращается вокруг оси O_1z по закону $\varphi_1(t) = 0{,}25\pi t^2$ ($\varphi \to$ [рад], $t \to$ [с]) и посредством зубчатой рейки 2 приводит в движение колесо 3 радиуса R_3 = 0,5 м (рис. I).

По прямолинейному пазу 4 колеса I по закону $r(t) = 0{,}5 + 0{,}25 \sin \frac{\pi}{2} t^2$ (r – в метрах, t – в секундах) движется точка M.

I. Найти траекторию точки M в полярной системе координат, совместив ее начало с началом декартовой системы координат O_1xy и приняв ось O_1x за полярную ось.



$$\bar{v}_{k_1} = \bar{v}_{k_2} = \bar{v}_k = \bar{v}_{A_2} = \bar{v}_{A_3} = \bar{v}_A$$

$$\bar{a}^\tau_{k_1} = \bar{a}^\tau_{k_2} = \bar{a}^\tau_k = \bar{a}^\tau_{A_2} = \bar{a}^\tau_{A_3} = \bar{a}^\tau_A = \bar{a}_{A_2}$$

Рис. I

2. Определить скорость и ускорение точки M в полярной системе координат в момент времени $t_1=\sqrt{2}$ с.

3. Вычислить скорость и ускорение точки M в декартовой системе координат O_1xy в момент $t_1=\sqrt{2}$ с.

4. Определить проекции ускорения точки M на оси естественного трехгранника (нормальную и касательную составляющие) в момент $t_1=\sqrt{2}$ с.

5. Вычертить (в произвольно выбранном масштабе) траекторию точки M и указать на рисунке ее скорость и ускорение в момент $t_1=\sqrt{2}$ с, а также составляющие скорости и ускорения точки M в декартовых, полярных и естественных осях координат:

$$\bar{\upsilon},\ \bar{a},\ \bar{\upsilon}_x,\ \bar{\upsilon}_y,\ \bar{a}_x,\ \bar{a}_y,\ \bar{\upsilon}_r,\ \bar{\upsilon}_p,\ \bar{a}_r,\ \bar{a}_p,\ \bar{a}^\tau,\ \bar{a}^n.$$

6. На ЭВМ построить графики зависимостей всех параметров движения точки M от времени в интервале от 0 до 2 с.

7. Для момента времени $t_1=\sqrt{2}$ с определить положение точки A_3 зубчатого колеса 3, считая, что в начальный момент движения она совпадала с точкой A_0, расположенной на горизонтальн м диаметре колеса 3.

8. Вычислить скорость и ускорение точек A_2 рейки 2 и A_3 зубчатого колеса 3 в момент $t_1=\sqrt{2}$ с.

9. Изобразить на схеме механизма в соответствующем масштабе скорости и ускорения точек A_2 и A_3 в момент $t_1=\sqrt{2}$ с.

10. Определить угловую скорость и угловое ускорение звеньев I и 3, указав круговыми стрелками их направления.

Решение.

I. Движение точки M задано в полярных координатах:

$$\begin{cases} r(t)=0{,}5+0{,}25\sin \pi/2\, t^2; \\ \varphi(t)=0{,}25\,\pi t^2. \end{cases}$$

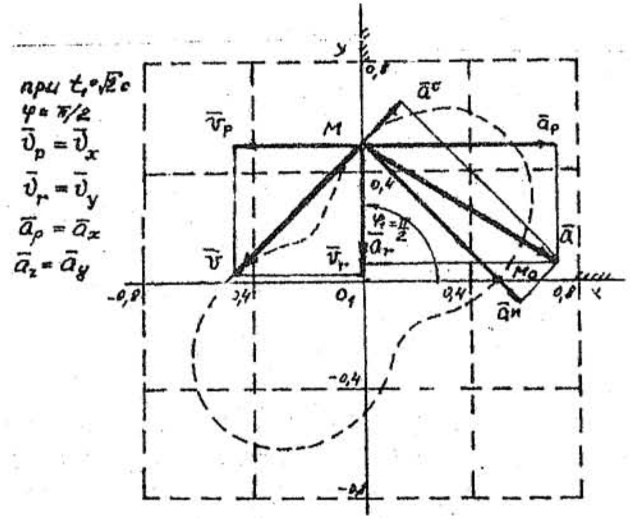
Исключая время, получим уравнение траектории точки M в виде

$$r(\varphi)=0{,}5+0{,}25\sin 2\varphi, \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

В выбранном масштабе сделаем чертеж с изображением траектории точки M (рис. 2).

В момент $t_1=\sqrt{2}$ с определим координаты точки M

$$r(t)\Big|_{t_1=\sqrt{2}\,c}=0{,}5\text{ м};\qquad \varphi(t)\Big|_{t_1=\sqrt{2}\,c}=\frac{\pi}{2}\text{ рад}.$$



φ	$\pi/12$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$r=0{,}5+0{,}25\sin 2\varphi$	0,63	0,72	0,5	0,5	0,5	0,5

Рис. 2

2. Скорость точки M в полярной системе координат имеет вид

$$\bar{\upsilon}=\dot r\,\bar{r}_0+r\dot\varphi\,\bar{p}_0 \quad\text{или}\quad \bar{\upsilon}=\bar{\upsilon}_r+\bar{\upsilon}_p,$$

где $\bar{\upsilon}_r=\dot r\,\bar{r}_0$ – радиальная, а $\bar{\upsilon}_p=r\dot\varphi\,\bar{p}_0$ – трансверсальная составляющие скорости.

Положительное направление проекций скорости совпадают с направлением единичных векторов $\bar{r}_0$ и $\bar{p}_0$.

Скорость точки M в полярной системе координат

$$\upsilon=\sqrt{\upsilon_r^2+\upsilon_p^2},$$

где $\upsilon_r=\dot r(t)=\dfrac{\pi t}{4}\cos\dfrac{\pi}{2}t^2,$

$$\upsilon_p=r(t)\,\dot\varphi(t)=\left(0{,}5+0{,}25\sin\frac{\pi}{2}t^2\right)\frac{\pi}{2}t,$$

$$\upsilon = \frac{\pi t}{4}\sqrt{2 + \sin\frac{\pi}{2}t^2 - \frac{3}{4}\sin^2\frac{\pi}{2}t^2} \ .$$

При $t_1 = \sqrt{2}$ с

$$\upsilon_r = -1{,}11 \text{ м/с}, \quad \upsilon_p = 1{,}11 \text{ м/с}, \quad \upsilon = 1{,}57 \text{ м/с} .$$

Ускорение точки M в полярной системе координат

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\bar{r}_0 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\bar{p}_0 \quad \text{или} \quad \bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_p \ ,$$

где $\bar{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\bar{r}_0$ – радиальная, а $\bar{a}_p = (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\bar{p}_0$ – трансверсальная составляющие ускорения.

Ускорение точки M в полярной системе координат

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2} =$$

$$= \sqrt{\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}t^2 - \frac{5\pi t^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}t^2 - \frac{\pi}{2}t^2\right)^2 + \left(\pi t^2\cos\frac{\pi}{2}t^2 + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}t^2 + 1\right)^2\right]\frac{\pi^2}{16}} \ .$$

где

$$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2}t^2 - \frac{5\pi t^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}t^2 - \frac{\pi t^2}{2}\right);$$

$$a_p = (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}t^2 + \pi t^2\cos\frac{\pi}{2}t^2\right).$$

При $t_1 = \sqrt{2}$ с

$$a_r = -3{,}25 \text{ м/с}^2, \quad a_p = -4{,}15 \text{ м/с}^2, \quad a = 5{,}27 \text{ м/с}^2 .$$

3. Уравнения движения точки M заданы в полярной системе координат. Несложно получить уравнения движения точки в декартовой системе O_1xy и наоборот. Действительно, выбрав за начало декартовой системы координат полярный полюс O_1 и совместив ось O_1x с полярной осью, получим следующие формулы

перехода из одной системы в другую:

$$\begin{matrix} r = r(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x = r(t)\cos\varphi(t), \\ y = r(t)\sin\varphi(t); \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \ , \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left[y(t)/x(t)\right] . \end{matrix}$$

Уравнения движения точки M в декартовой системе координат имеют вид

$$x_м(t) = r\cos\varphi = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}t^2\right)\cos\frac{\pi}{4}t^2 \ ;$$

$$y_м(t) = r\sin\varphi = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}t^2\right)\sin\frac{\pi}{4}t^2 .$$

Проекции скорости точки M на оси декартовой системы координат представлены следующим образом:

$$\upsilon_x = \dot{x}_м(t) = \frac{\pi t}{4}\cos\frac{\pi t^2}{2}\cos\frac{\pi t^2}{4} - \frac{\pi}{4}t\sin\frac{\pi}{4}t^2 - \frac{\pi t}{8}\sin\frac{\pi}{2}t^2\sin\frac{\pi}{4}t^2 \ ;$$

$$\upsilon_y = \dot{y}_м(t) = \frac{\pi t}{4}\cos\frac{\pi t^2}{2}\sin\frac{\pi t^2}{4} + \frac{\pi t}{4}\cos\frac{\pi}{4}t^2 + \frac{\pi t}{8}\sin\frac{\pi}{2}t^2\cos\frac{\pi}{4}t^2 \ ;$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \ .$$

Тогда скорость точки M при $t_1 = \sqrt{2}$ с

$$\upsilon = 1{,}57 \text{ м/с},$$

так как

$$\upsilon_x = -1{,}11 \text{ м/с},$$

$$\upsilon_y = -1{,}11 \text{ м/с} .$$

Проекции ускорения точки M на оси декартовой системы координат имеют вид:

$$a_x = a_r\cos\varphi - a_p\sin\varphi;$$

при $\varphi = \pi/2$ $\quad a_x = -a_p \ , \ a_y = a_r$.

$$a_y = a_r\sin\varphi + a_p\cos\varphi;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \ .$$

Тогда ускорение точки M при $t_1=\sqrt{2}$ с

$$a = 5,27 \text{ м/с}^2,$$

так как

$$a_x = 4,15 \text{ м/с}^2 ,$$
$$a_y = -3,25 \text{ м/с}^2 .$$

4. Для вычисления проекций ускорения точки M на оси естественного трехгранника перейдем от координатного способа задания движения точки к естественному [I, 2].

Выберем некоторый начальный момент времени t_0. Этому моменту соответствует определенная точка траектории с координатами $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, которую обозначим M_0 (начало отсчета расстояний на траектории). Остается задать положительное направление отсчета расстояний $s(t)$ по траектории от точки M_0 до точки M и найти зависимость, определяющую закон движения точки по траектории. Для этого воспользуемся известным выражением для дифференциала дуги кривой

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 ,$$

откуда $s = \pm \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$.

При вычислении ускорений всегда должно выполняться следующее равенство:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

Тогда

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} .$$

где $$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{4}\sqrt{1+\sin\frac{\pi}{2}t^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{2}t^2 + \cos^2\frac{\pi}{2}t^2} +$$
$$+ \frac{\pi t}{4}\cdot\frac{\pi t\cos\frac{\pi}{2}t^2 - \frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{2}t^2\cos\frac{\pi}{2}t^2(\pi t)}{2\sqrt{1+\sin\frac{\pi}{2}t^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{2}t^2 + \cos^2\frac{\pi}{2}t^2}}$$

При $t_1 = \sqrt{2}$ с

$$a_\tau = -0,63 \text{ м/с}^2 , \quad a_n = 5,23 \text{ м/с}^2 .$$

5. Траектория точки M, ее скорость, ускорение, их составляющие в декартовых, полярных и естественных осях для момента времени $t=\sqrt{2}$ с представлены на рис. 2.

6. На рис. 3-5 представлены построенные с помощью ЭВМ в интервале времени $0 \leqslant t \leqslant 2$ с : траектория точки M (рис. 3), скорость /рис. 4, где I – $v_r(t)$; 2 – $v_p(t)$; 3 – $v(t)$ / и ускорение /рис. 5, где I – $a_r(t)$; 2 – $a_p(t)$; 3 – $a(t)$ / точки M в полярной системе координат.

Рассмотрим движение звеньев I,2,3 механизма, изображенного на рис. I.

Звено I – зубчатое колесо, вращается вокруг оси $O_1 z$ по закону $\varphi_1(t) = 0,25\pi t^2$. Зубчатая рейка 2 движется поступательно и имеет точку контакта K_2 со звеном I, и точку A_2 – со звеном 3. Звено 3 совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси $O_3 z$, перпендикулярной плоскости рисунка.

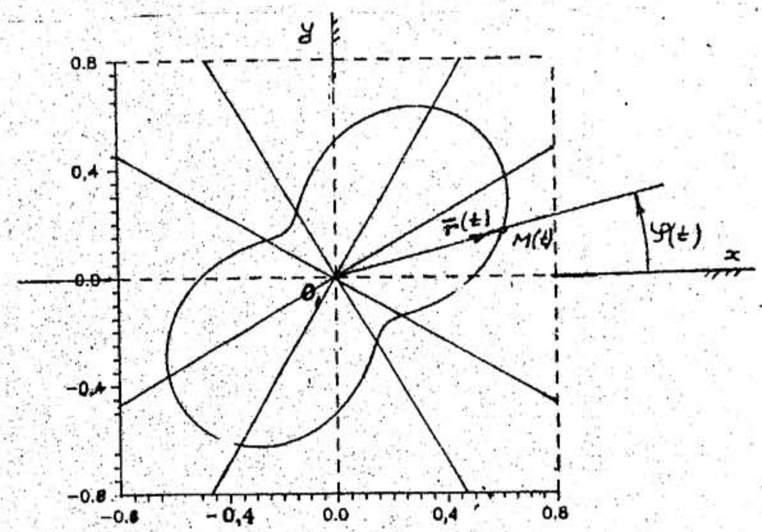


Рис. 3

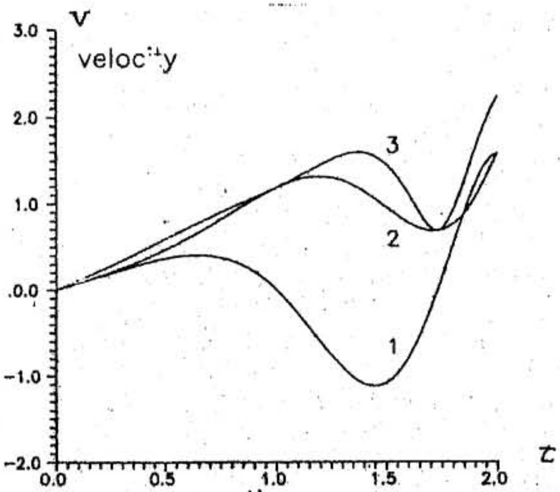


Рис. 4

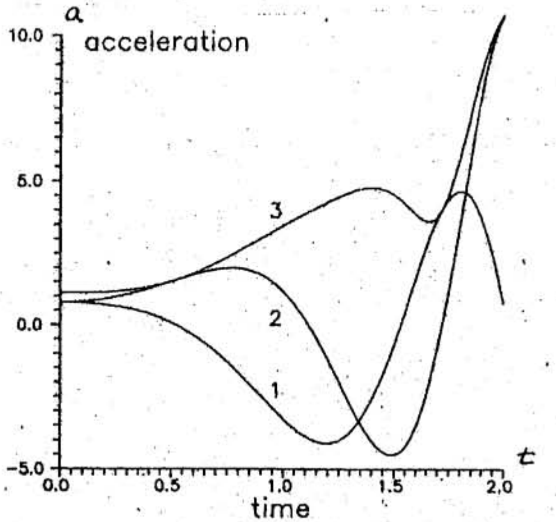


Рис. 5

7. Определим положение точки A_3, считая, что в начальный момент движения она совпадала с точкой A_0, на горизонтальном диаметре колеса 3. Зная закон движения звена I, найдем уравнение движения звена 3 [I]

$$\varphi_3(t) = \frac{-\varphi_1(t) R_1}{R_3} .$$

В декартовой системе координат O_1xy

$$x_{A_3} = -\left[R_3 \cos\varphi_3 + (R_1 + R_3)\right] ,$$

$$y_{A_3} = -(R_3 \sin\varphi_3 + K_2 A_2)$$

при $t_1 = \sqrt{2}$ с $\varphi_3 = \pi$ рад.

8. Вычислим скорость и ускорение точек A_2 и A_3 рейки 2 и зубчатого колеса 3 в декартовой системе координат:

$$\upsilon_{A_3} = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} , \quad (R_1 = 1\,м,\ R_3 = 0{,}5\,м),$$

где $\upsilon_x = \dot{x}_{A_3}(t) = \frac{\pi t}{2} \sin\frac{\pi}{2} t^2$, $\upsilon_y = \dot{y}_{A_3}(t) = \frac{\pi t}{2} \cos\frac{\pi}{2} t^2$.

Тогда

$$\upsilon_{A_3} = \frac{\pi t}{2} .$$

При $t_1 = \sqrt{2}$ с

$\upsilon_x = 0$ м/с ; $\upsilon_y = -2,23$ м/с ; $\upsilon_{A_3} = 2,23$ м/с;

$$a_{A_3} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} ,$$

где

$$a_x = \ddot{x}_{A_3}(t) = \frac{\pi^2 t^2}{2} \cos\frac{\pi}{2} t^2 + \frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi t^2}{2} ,$$

$$a_y = \ddot{y}_{A_3}(t) = -\frac{\pi^2 t^2}{2} \sin\frac{\pi}{2} t^2 + \frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{2} t^2 .$$

При $t_1 = \sqrt{2}$ с

$a_x = -9,853$ м/с^2, $a_y = -\frac{\pi}{2} = -1,57$ м/с^2, $a_{A_3} = 9,97$ м/с^2.

Определим проекции ускорения точки A_3 на оси естественного трехгранника

$$a_{A_3}=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}\ ,$$

где $a_\tau=\frac{dv_\tau}{dt}=\frac{\pi}{2}$; $a_n=\frac{v_\tau^2}{R_3}=\frac{\pi^2 t^2}{2}$; $a_\tau=1{,}57\,м/с^2$; $a_n\big|_{t_1=\sqrt{2}\,c}=\pi^2=9{,}85\,м/с^2$.

При $t_1=\sqrt{2}$: $a_{A_3}=9{,}97\,м/с^2$.

В месте контакта звеньев 2 и 3 скорости и касательные составляющие абсолютных ускорений точек A_2 и A_3 совпадают, т.е.

$$\bar{v}_{A_2}=\bar{v}_{A_3},\quad \bar{a}^\tau_{A_2}=\bar{a}^\tau_{A_3},\quad \text{но}\quad \bar{a}_{A_2}\neq\bar{a}_{A_3}\ .$$

На рис. 6–8 представлены построенные с помощью ЭВМ графики зависимостей в интервале времени $0\leqslant t\leqslant 2\,c$ скорости /рис. 6, где I – $v_{A_3x}(t)$; 2 – $v_{A_3y}(t)$; 3 – $v_{A_3}(t)$ /, ускорения /рис. 7, где I – $a_{A_3x}(t)$; 2 – $a_{A_3y}(t)$; 3 – $a_{A_3}(t)$ / точки A_3 в декартовой системе координат и проекции ускорения точки A_3 на оси естественного трехгранника /рис. 8, где I – $a^\tau_{A_3}(t)$; 2 – $a^n_{A_3}(t)$; 3 – $a_{A_3}(t)$ /.

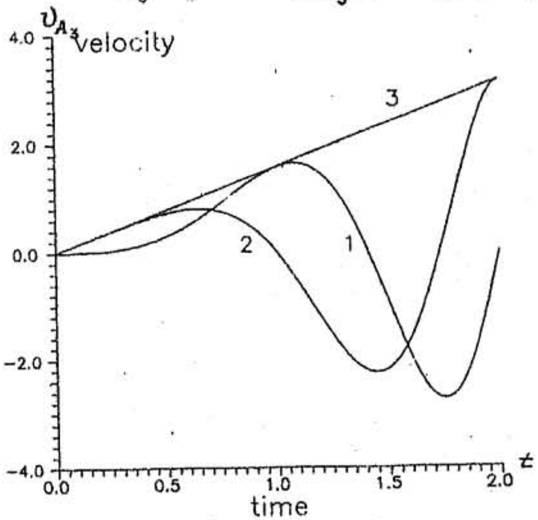


Рис. 6

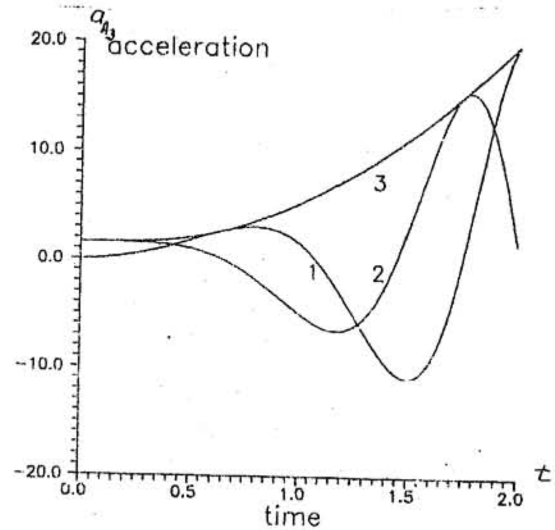


Рис. 7

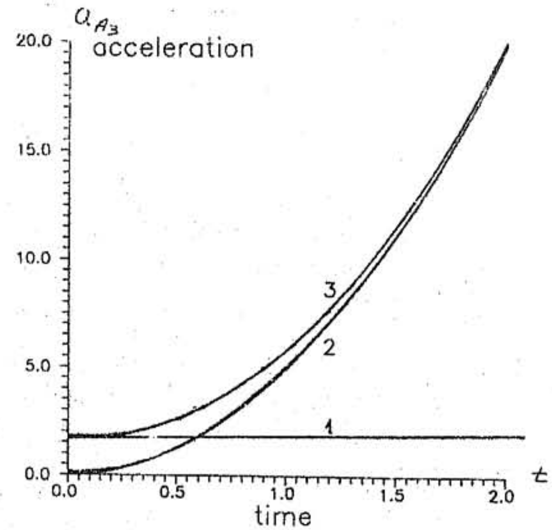


Рис. 8

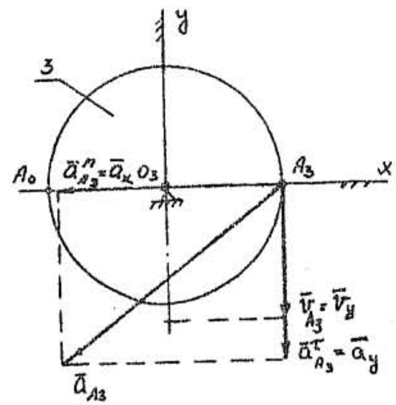


Рис. 9

9. На рис. 9 изображена траектория движения точки A_3, в выбранном масштабе сделан чертеж с указанием скорости и ускорения точки A_3 для момента времени $t_1=\sqrt{2}$ с.

10. Определим угловую скорость и угловое ускорение звеньев I и 3. Если звено I совершает вращательное движение по закону $\varphi_1(t)=\dfrac{\pi}{4}t^2$, то угловая скорость

$$\bar\omega_1=\frac{d\varphi_1}{dt}\,\bar k_0\,,$$

где $\bar k_0$ – единичный вектор оси O_1z ; $\omega_z=\omega_1$;

$$\omega_1=\frac{d\varphi_1}{dt}=\frac{\pi}{2}\,t\,\frac{рад}{с}\,.$$

При $t_1=\sqrt{2}$ с

$$\omega_1=2{,}23\,\frac{рад}{с}\,.$$

Угловое ускорение звена I является первой производной по времени от угловой скорости, т.е.

$$\bar\varepsilon_1=\frac{d\bar\omega_1}{dt}=\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}\,\bar k_0,\quad \varepsilon_z=\varepsilon_1=\pi/2=1{,}57\,\frac{рад}{с^2}$$

(ω_1 и ε_1 на рис. I показаны круговыми стрелками).

Для определения угловой скорости звена 3 воспользуемся кинематической связью [I]

$$\bar v_{K_1}=\bar v_{K_2}\,,\qquad \bar v_{K_2}=\bar v_{A_2}\,;\qquad \bar v_{A_2}=\bar v_{A_3}\,;\qquad |\bar v_{K_1}|=\omega_1R_1\,;$$

$$|\bar v_{A_3}|=|\omega_3|R_3\,,\qquad \omega_3=\frac{-\omega_1R_1}{R_3}\,,\qquad \omega_3=-\pi t\,.$$

При $t_1=\sqrt{2}$ с

$$\omega_3=-4{,}44\,\frac{рад}{с}\,.$$

Угловое ускорение звена 3

$$\bar\varepsilon_3=\frac{d\bar\omega_3}{dt}\,;\qquad \varepsilon_3=-\pi=-3{,}14\,\frac{рад}{с^2}\,.$$

(ω_3 и ε_3 на рис. I показаны круговыми стрелками, причем направление ω_1 определяется направлением $\bar v_K$, а направление ω_3 – $\bar v_A$. Направление круговой стрелки ε_1 определяется направлением $\bar a^\tau_{K_1}$, а направление ε_3 – $\bar a^\tau_{A_3}$.)

<u>Пример № 2</u>

Кулиса I вращается вокруг оси O_1z по закону $\varphi_1(t)=\dfrac{\pi t}{6}$ (φ – [рад], t – [с]) и приводит в движение механизм, изображенный на рис. IO. В точках соприкосновения звеньев механизма проскальзывание отсутствует, нить считать нерастяжимой.

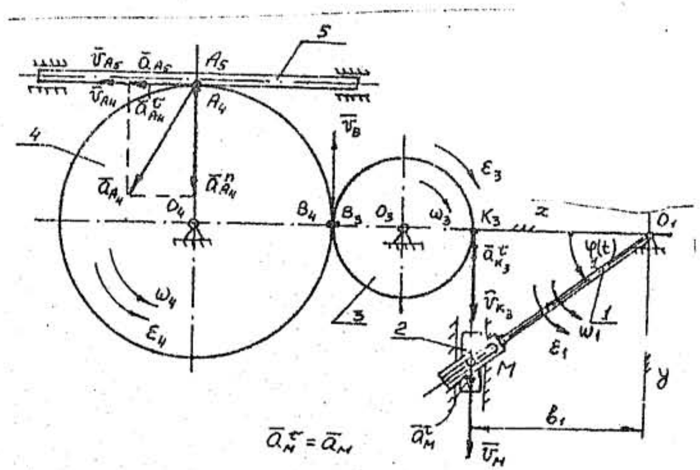


Рис. IO

Для момента времени $t = 1$ с

1. Найти траекторию движения точки M, определить декартовы координаты точки M.

2. Определить скорость и ускорение точки M в декартовой системе координат.

3. Вычислить проекции ускорения точки M на оси естественного трехгранника (определить его касательную и нормальную составляющие).

4. Вычислить радиальную и трансверсальную составляющие скорости и ускорения точки M.

5. Показать векторы скорости, ускорения и их составляющие для точки M на чертеже механизма.

6. Для всех звеньев механизма, совершающих вращательное движение, найти угловые скорости и угловые ускорения, показать их круговыми стрелками на чертеже.

7. Для точек A_4 и A_5 определить скорости и ускорения, показать их на чертеже механизма.

В расчетах принять $b_1 = 0{,}2$ м, $R_3 = 0{,}1$ м, $R_4 = 0{,}15$ м.

Решение.

1. Координаты точки в декартовой системе имеют вид

$$x_M = \mathrm{const} = b_1 ,$$

$$y_M = b_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = b_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} t .$$

Траекторией движения точки M является часть прямой

$$x_M = b_1 = \mathrm{const}, \qquad 0 \leqslant y_M < \infty .$$

Для момента времени $t_1 = 1$ с

$$x_M = 0{,}2 \text{ м};$$

$$y_M = 0{,}12 \text{ м}.$$

2. Определим скорость и ускорение точки M в декартовой системе координат

$$v_x = \dot{x}_M(t) = 0; \qquad a_x = \ddot{x}_M(t) = 0;$$

$$v_y = \dot{y}_M(t) = \frac{b_1}{\cos^2 \frac{\pi}{6} t} \cdot \frac{\pi}{6}; \qquad a_y = \ddot{y}_M(t) = \frac{\pi^2}{90} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{6} t}{\cos^3 \frac{\pi}{6} t};$$

$$v_M = v_y; \qquad a_M = a_y .$$

При $t_1 = 1$ с

$$v_M = 0{,}14 \text{ м/с}; \qquad a_M = 0{,}084 \text{ м/с}^2 .$$

3. Вычислим проекции ускорения точки M на оси естественного трехгранника

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{|v|},$$

$$a_n = \sqrt{a_M^2 - a_\tau^2} .$$

При $t_1 = 1$ с

$$a_\tau = 0{,}084 \text{ м/с}^2, \qquad a_n = 0 .$$

Таким образом, $a_M(t_1) = a_\tau(t_1)$, а $a_n(t) = 0$, как и следовало ожидать, поскольку траекторией точки M является луч.

4. Вычислим радиальную и трансверсальную составляющие скорости и ускорения точки M. Поскольку $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, то

$$v_r = \dot{r}(t) = \frac{x v_x + y v_y}{r},$$

$$v_p = r(t)\, \dot{\varphi}_1(t),$$

$$v_M = \sqrt{v_r^2 + v_p^2};$$

$$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}_1^2) = \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y}}{r},$$

$$a_p = (r\ddot{\varphi}_1 + 2\dot{r}\dot{\varphi}_1) = \frac{x\ddot{y} - y\ddot{x}}{r},$$

$$a_M = \sqrt{a_r^2 + a_p^2} .$$

При $t_1 = 1$ с

$$v_r = 0{,}07 \text{ м/с}; \qquad v_p = 0{,}12 \text{ м/с}; \qquad v_M = 0{,}14 \text{ м/с};$$

$$a_r = 0{,}0427 \text{ м/с}^2; \qquad a_p = 0{,}073 \text{ м/с}^2; \qquad a_M = 0{,}084 \text{ м/с}^2 .$$

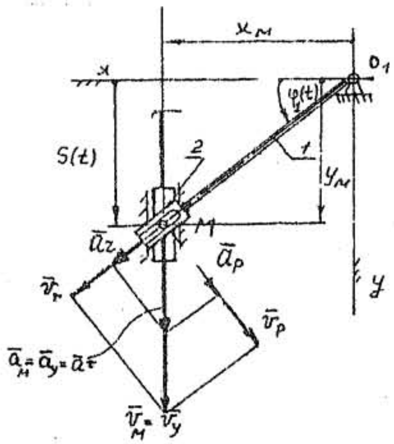


Рис. II

5. Скорость, ускорение точки M и их составляющие для момента времени $t_1 = \text{I}$ с оказаны на рис. II.

Рассмотрим движение механизма, изображенного на рис. IO. Звенья I, 3, 4 совершают вращательное движение, звено 5 – поступательное. Закон движения I-го звена $\varphi_1(t)=\frac{\pi}{6}t$ задан.

6. Вычислим угловые скорости и ускорения звеньев I, 3, 4 для момента времени $t_1 = \text{I}$ с

$$\bar{\omega}_1=\frac{d\varphi_1}{dt}\bar{k}_0,\qquad \text{где}\quad \bar{k}_0 - \text{единичный вектор оси } O_1 z\ ;$$

$$\omega_1=\omega_z=\frac{d\varphi_1}{dt}=\frac{\pi}{6}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}\qquad \omega_1=0{,}52\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}\ ;$$

$$\bar{\varepsilon}_1=\frac{d\bar{\omega}_1}{dt}\ ;\qquad \varepsilon_1=\varepsilon_z=\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}=0\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

В точках соприкосновения колес 3 и 4 проскальзывание отсутствует, следовательно,

$$\bar{v}_M=\bar{v}_{K_3}\ ;\qquad v_{K_3}=\omega_3 R_3\ ;\qquad \omega_3=\frac{v_M}{R_3}\ ;$$

$$\bar{v}_{B_3}=\bar{v}_{B_4}\ ;\qquad \omega_3 R_3=\omega_4 R_4\ ;\qquad \omega_4=\frac{\omega_3 R_3}{R_4}\ ;$$

$$\bar{a}_M=\bar{a}^\tau_{K_3}\ ;\qquad a^\tau_{K_3}=\varepsilon_3 R_3\ ;$$

$$\varepsilon_3=\frac{a_M}{R_3}\ ;\qquad \bar{a}^\tau_{B_3}=\bar{a}^\tau_{B_4}\ ;\qquad \varepsilon_3 R_3=\varepsilon_4 R_4\ ;\qquad \varepsilon_4=\varepsilon_3\frac{R_3}{R_4}\ .$$

При $t_1 = \text{I}$ с

$$\omega_3=-1{,}4\ \frac{\text{рад}}{\text{с}},\qquad \varepsilon_3=-0{,}84\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\ ;\qquad \omega_4=0{,}93\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}\ ;\qquad \varepsilon_4=0{,}56\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\ .$$

Круговые стрелки, характеризующие направление ω_1, ε_1, ω_3, ε_3, ω_4, ε_4, изображены на рис. IO.

7. Скорости точек A_4 и A_5 равны, так как нет проскальзывания между рейкой 5 и колесом 4:

$$\bar{v}_{A_4}=\bar{v}_{A_5}\ ;\qquad v_{A_4}=\omega_4 R_4\ ;\qquad \bar{a}^\tau_{A_4}=\bar{a}_{A_5}\ ;\qquad a^\tau_{A_4}=\varepsilon_4 R_4\ ;\qquad a^n_{A_5}=0;$$

$$a^n_{A_4}=\omega_4^2 R_4\ ;\qquad a_{A_4}=\sqrt{(a^\tau_{A_4})^2+(a^n_{A_4})^2}\ .$$

При $t_1 = \text{I}$ с

$$v_{A_4}=v_{A_5}=0{,}14\ \text{м/с},\qquad a_{A_5}=0{,}084\ \text{м/с}^2,$$

$$a^\tau_{A_4}=a_{A_5}=0{,}084\ \text{м/с}^2,\qquad a^n_{A_4}=0{,}13\ \text{м/с}^2,\qquad a_{A_4}=0{,}155\ \text{м/с}^2.$$

Найденные скорости и ускорения точек A_4 и A_5 представлены графически на рис. I2.

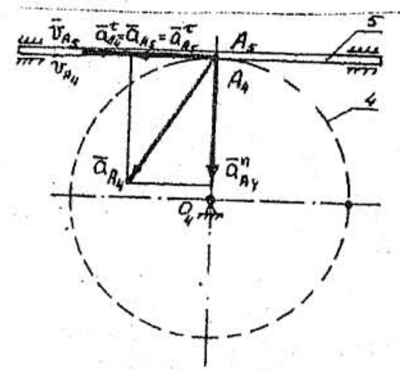


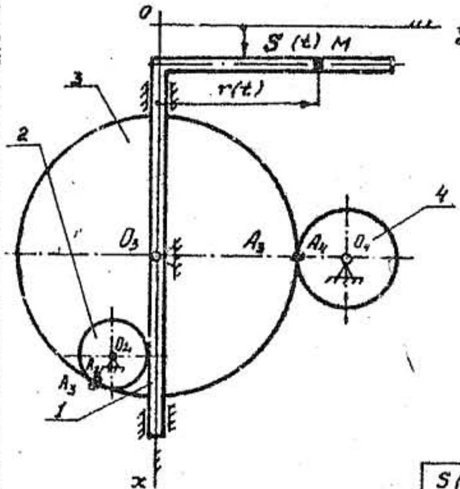
Рис. I2

ЛИТЕРАТУРА

I. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, I990. 608 с.

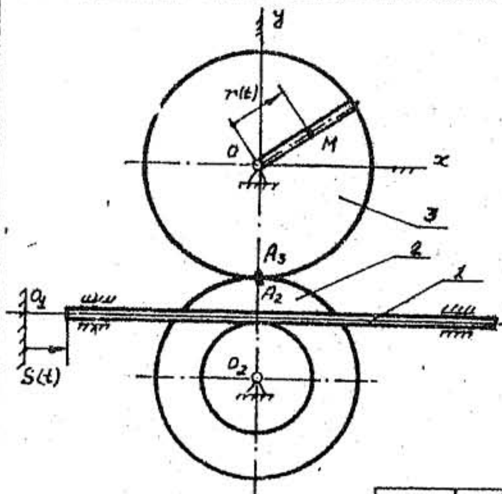
2. Кинематика точки и простейшие движения твердого тела: / А.А.Панкратов, А.А.Пожалостин, П.М.Шкапов: Методические указания. М.: Изд-во МГТУ, I99I. 53 с.

1



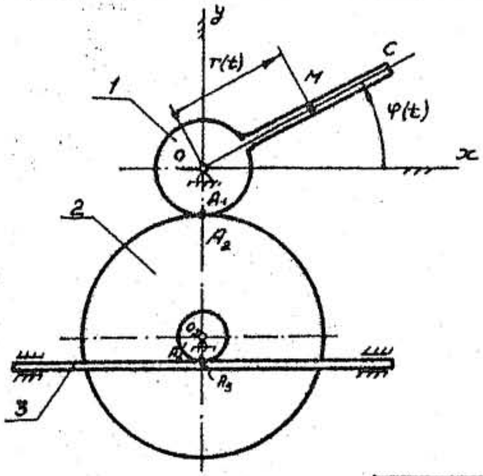
$S(t)$	$r(t)$	R_2	R_3	R_4	t
t^2	e^{t-1}	0,1	0,4	0,3	1

2



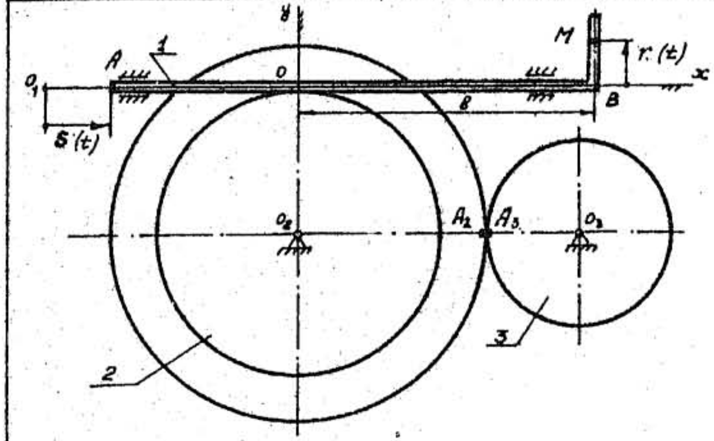
$S(t)$	$r(t)$	r_2	R_2	R_3	t
$0{,}15t^2$	0,05+0,1t	0,1	0,2	0,3	2

3

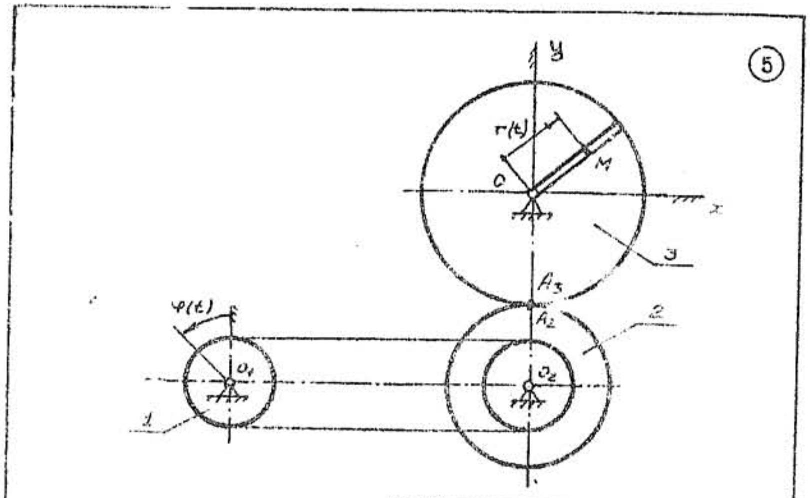


$\varphi(t)$	$r(t)$	r_2	R_2	R_1	t
$5t^2$	$0{,}2+0{,}5t^2$	0,1	0,5	0,2	0,4

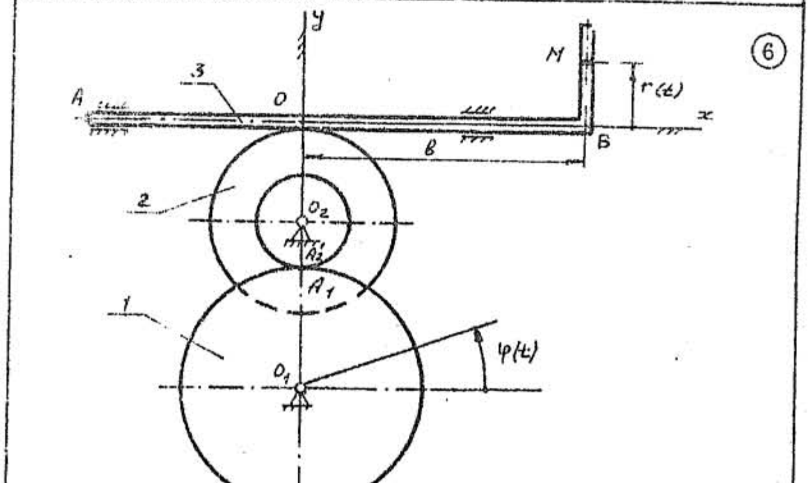
4



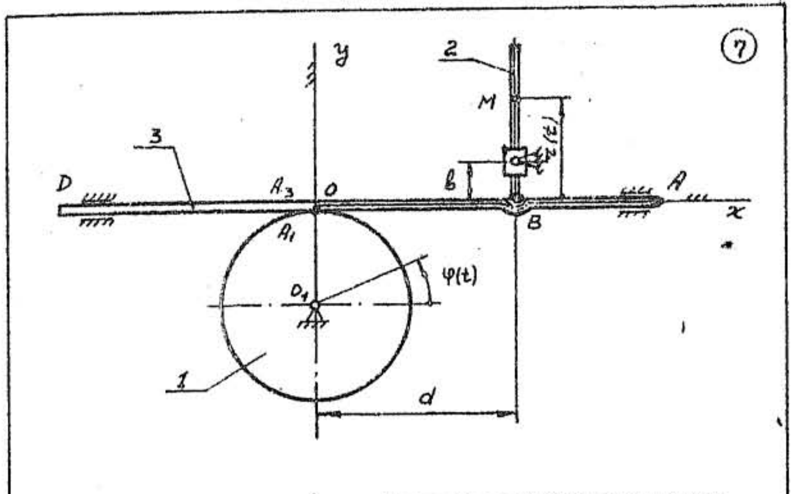
$S(t)$	$r(t)$	r_2	R_2	R_3	b_0	t
$\frac{3}{2}\sin \pi t$	$2t^2$	0,6	0,8	0,4	2,0	0,5



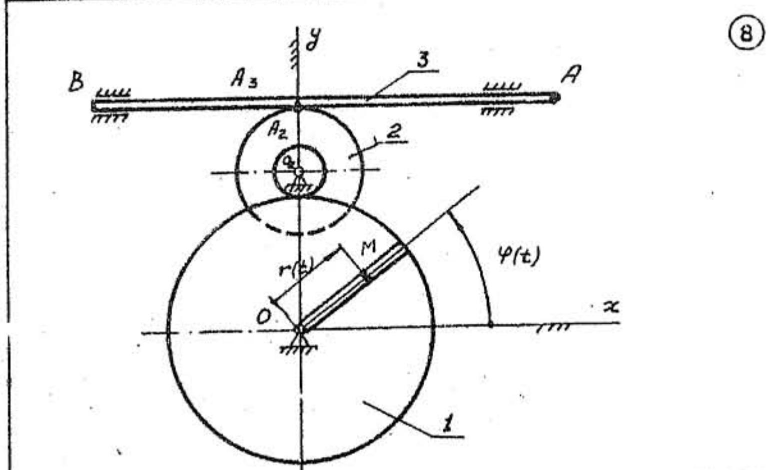
φ(t)	r(t)	R_1	r_2	R_2	R_3	t
$4(t^2-t)$	$0{,}1+0{,}2t^2$	0,1	0,1	0,3	0,4	1



φ(t)	r(t)	r_2	R_2	R_1	b_0	t
t^2	$0{,}2+t^2$	0,2	0,4	0,5	0,5	1

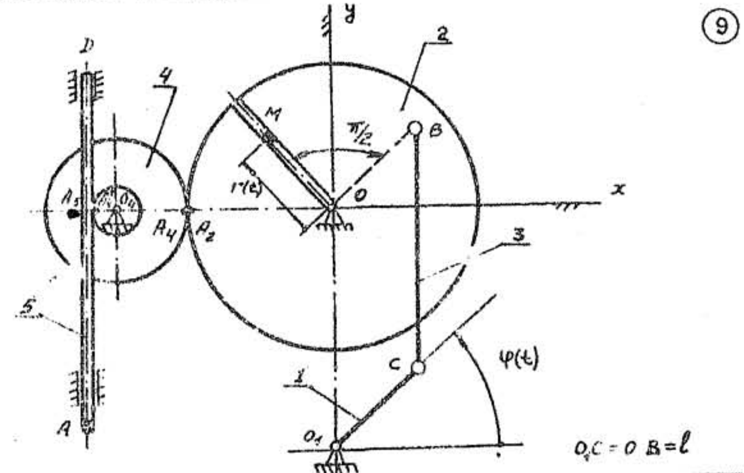


φ(t)	r(t)	R_1	b	d_0	t
t	t^3+t	0,2	0,05	0,4	1



φ(t)	r(t)	R_1	r_2	R_2	t
$5t^2$	$\frac{3}{2}t^2$	1	0,1	0,5	0,7

(9)

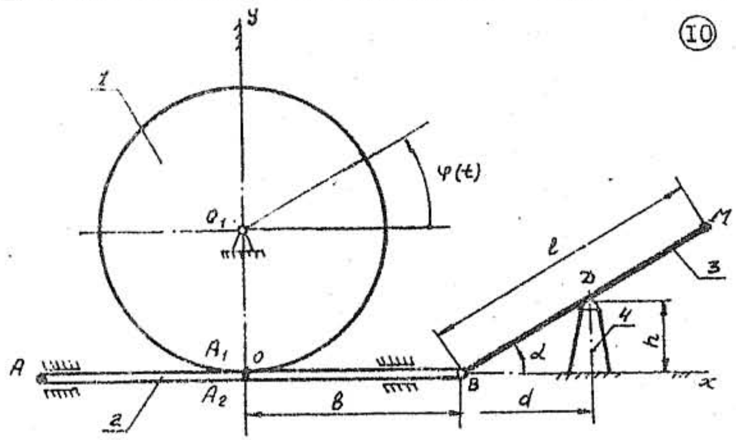


$O_1C = OB = \ell$

$\varphi(t)$	$r(t)$	R_2	r_4	R_4	ℓ	t
$1/3\, t^3$	$1/15\, t^3$	0,8	0,3	0,4	0,6	2

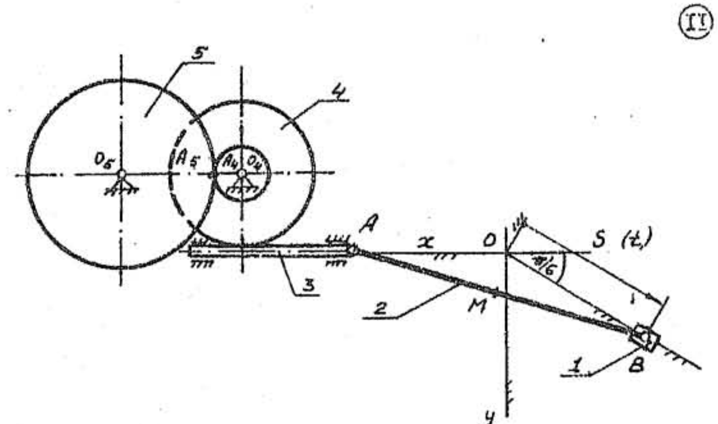
Дополн. вопр.
Найти скорость и ускорение точки В.

(10)



$\varphi(t)$	R_1	ℓ	b_0	d_0	h	t
$3t^2$	0,5	2	0,8	1,5	0,2	0,9

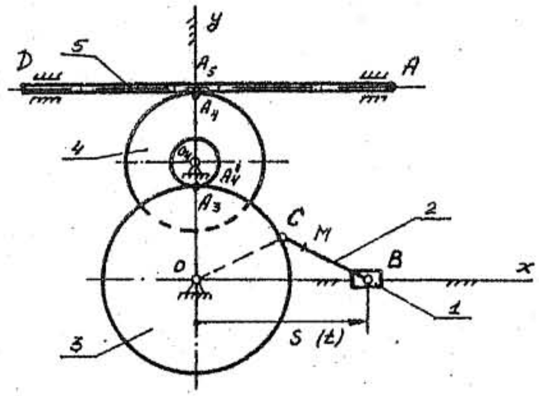
(11)



$AB = \ell;\quad AM = MB$

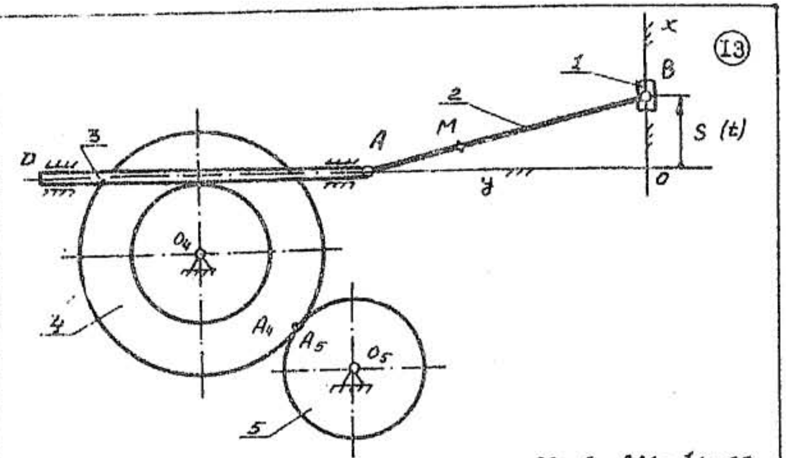
$S(t)$	r_4	R_4	R_5	ℓ	t
$1/3\cos 2\pi t$	0,1	? 3	0,4	0,5	1

(12)



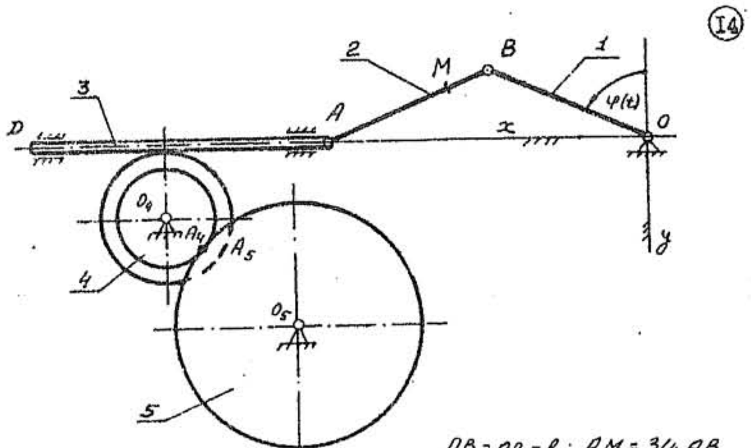
$CB = \ell;\quad CM = 1/4\, CB$

$S(t)$	R_3	r_4	R_4	ℓ	t
$0{,}4\cos\frac{\pi t}{4}$	0,4	0, '	0,3	0,4	1



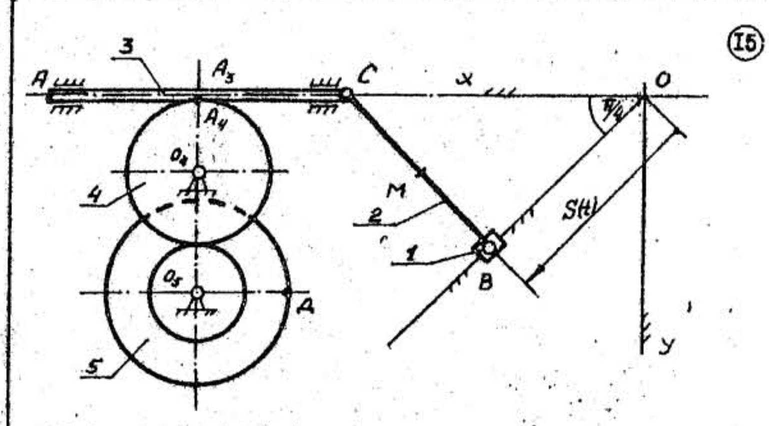
$AB = \ell;\ AM = 1/3\,AB$

$S(t)$	r_4	R_4	R_5	ℓ	t
$0{,}3\cos\frac{\pi t}{2}$	0,3	0,5	0,3	0,3	1



$OB = AB = \ell;\ AM = 3/4\,AB$

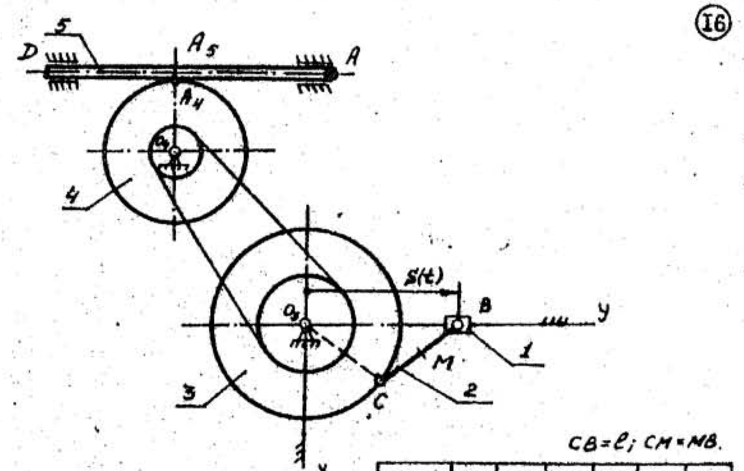
$\varphi(t)$	r_4	R_4	R_5	ℓ	t
$1/4\,\pi t$	0,1	0,2	0,4	0,4	1



Д.В. Определить скорость и ускорение т. Д

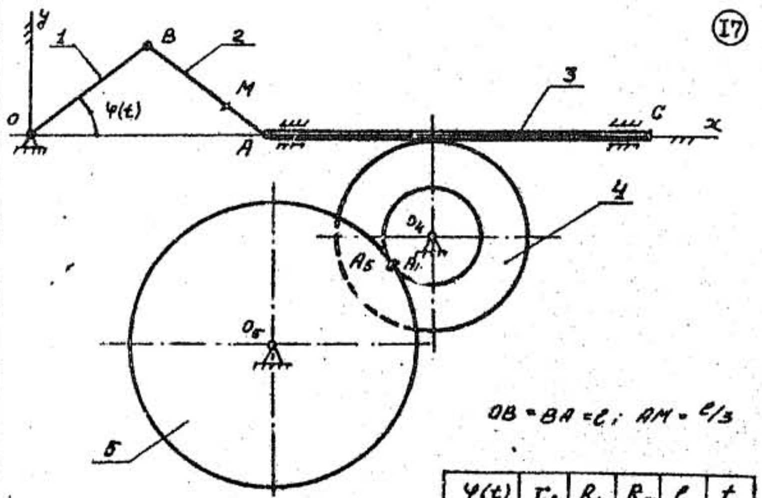
$CB = \ell;\ CM = MB$

$S(t)$	R_4	r_5	R_5	ℓ	t
$0{,}1\sqrt{2}\sin\frac{\pi t}{2}$	0,3	0,2	0,4	0,2	1



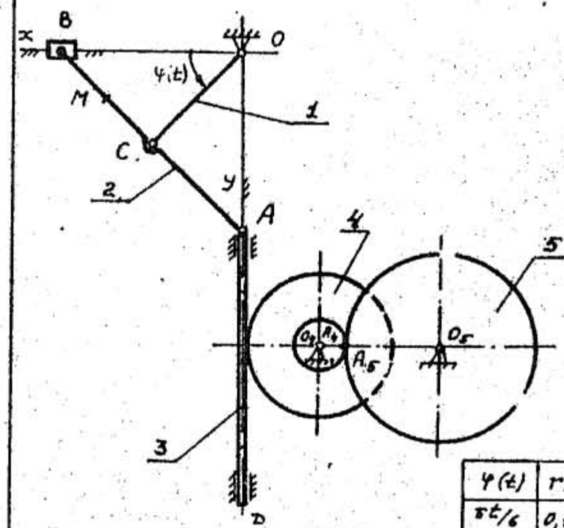
$CB = \ell;\ CM = MB.$

$S(t)$	r_3	R_3	r_4	R_4	ℓ	t
$0{,}4\cos 2\pi t$	0,2	0,4	0,1	0,4	0,4	1



$OB = BA = \ell;\ AM = \ell/3$

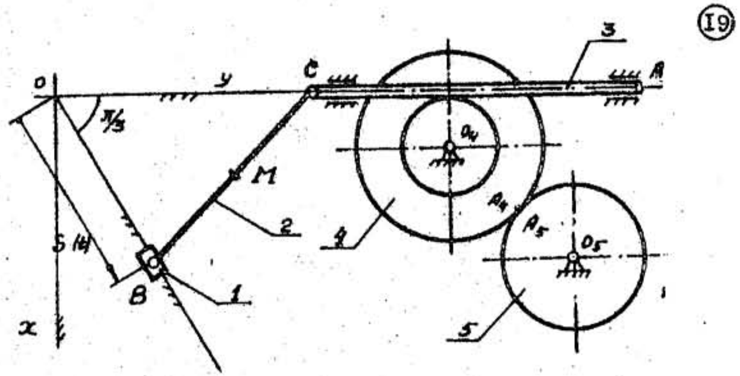
$\varphi(t)$	r_4	R_4	R_5	ℓ	t
$\pi t/3$	0,2	0,4	0,5	1	1



$OC = AC = CB = \ell$

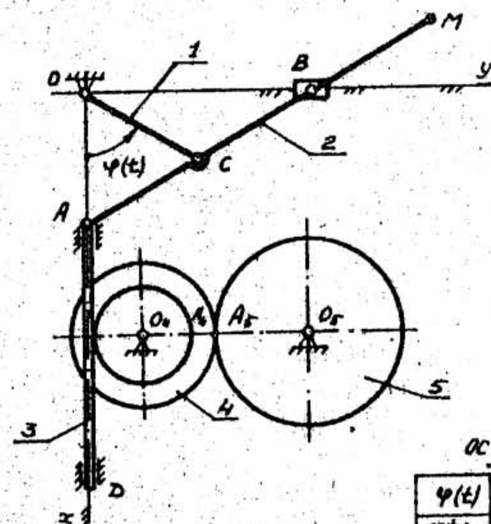
$BM = MC$

$\varphi(t)$	r_4	R_4	R_5	ℓ	t
$\pi t/6$	0,1	0,3	0,4	1	1



$CB = \ell;\ CM = \ell/3$

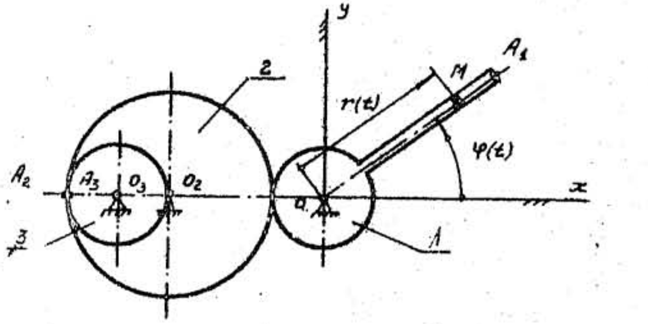
$S(t)$	r_4	R_4	R_5	ℓ	t
$\sin \pi t/3$	0,2	0,4	0,3	1,5	1



$OC = AC = CB = BM = \ell$

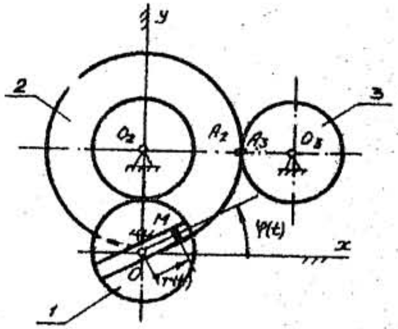
$\varphi(t)$	r_4	R_4	R_5	ℓ	t
$\pi t/3$	0,2	0,3	0,4	1	1

21



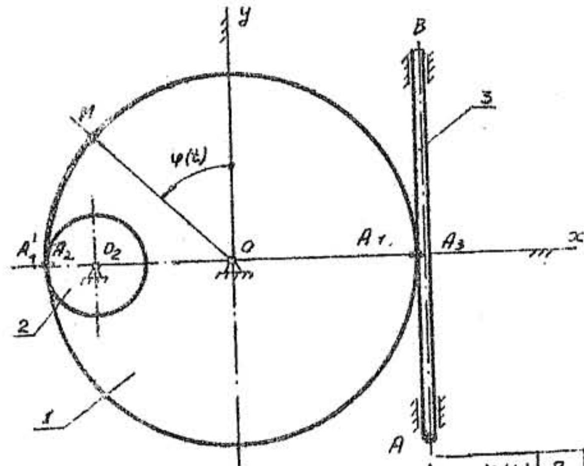
$\varphi(t)$	$r(t)$	R_1	R_2	R_3	t
t^2	e^{t^2}	0,1	0,2	0,1	1

22



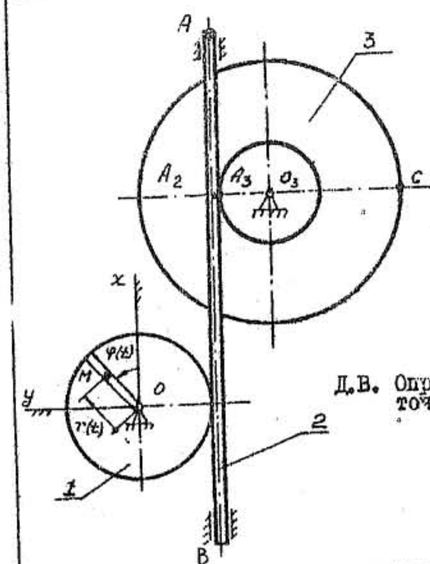
$\varphi(t)$	$r(t)$	R_1	r_2	R_2	R_3	t
t^2	$0{,}1t^2$	0,5	0,5	1,0	0,5	1

23



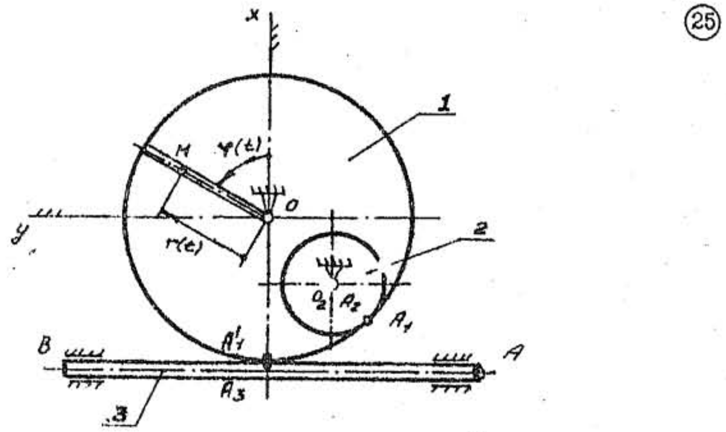
$\varphi(t)$	R_1	R_2	t
$\frac{2}{3}\pi \sin \frac{\pi t}{6}$	0,4	0,1	1

24

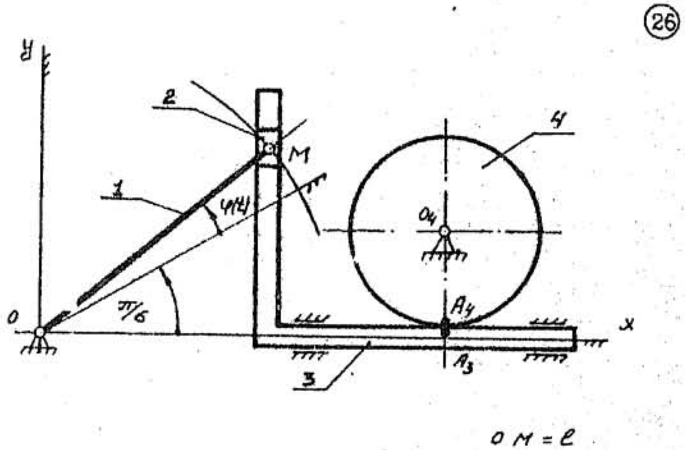


Д.В. Определить скорость и ускорение точки С.

$\varphi(t)$	$r(t)$	R_1	r_3	R_3	t
t^2	$0{,}25t$	0,3	0,1	0,4	1

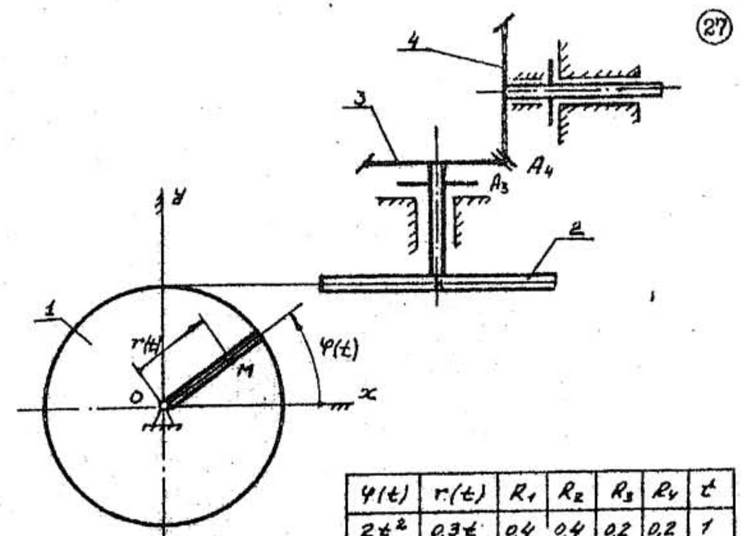


$\varphi(t)$	$r(t)$	R_1	R_2	t
$0{,}25t^2$	$0{,}2t^2$	0,3	0,1	1

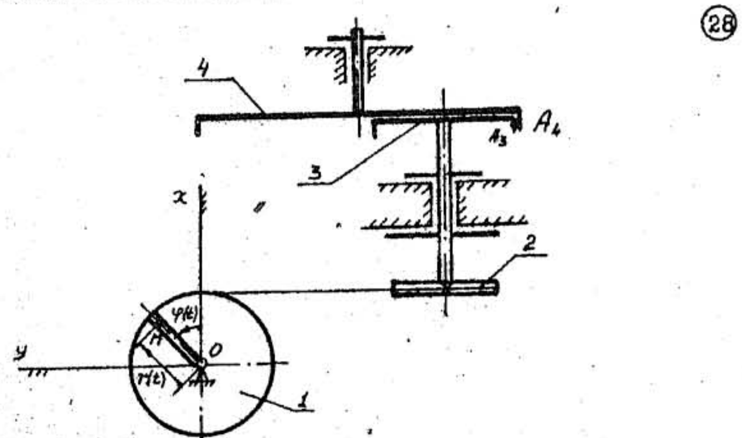


$OM = \ell$

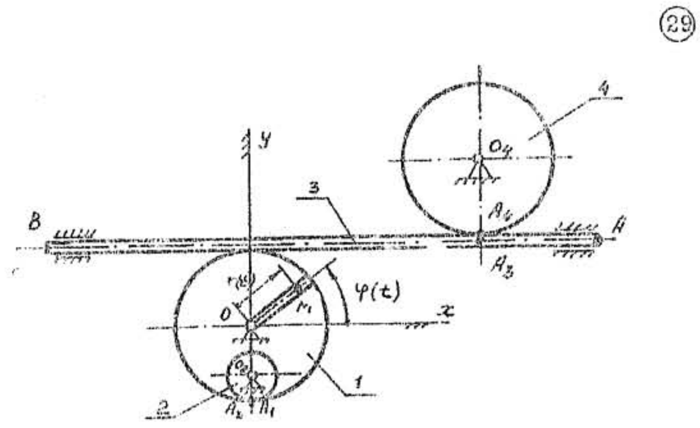
$\varphi(t)$	R_4	ℓ	t
$0{,}6\ t^2$	0,2	0,6	1



$\varphi(t)$	$r(t)$	R_1	R_2	R_3	R_4	t
$2t^2$	$0{,}3t$	0,4	0,4	0,2	0,2	1



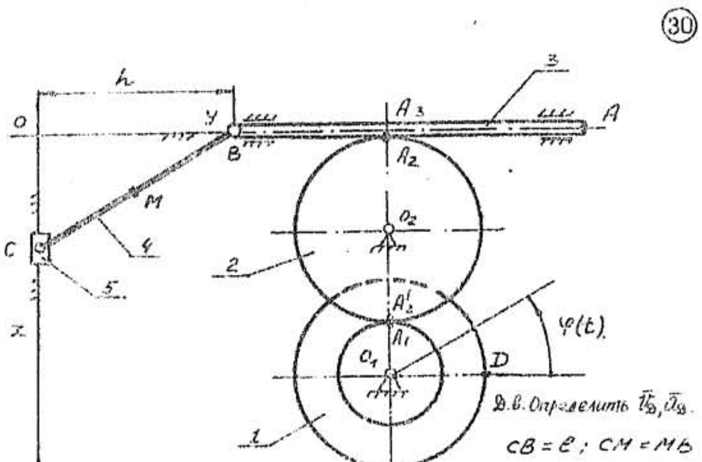
$\varphi(t)$	$r(t)$	R_1	R_2	R_3	R_4	t
$2t^2$	$0{,}1t$	0,3	0,2	0,3	0,5	1



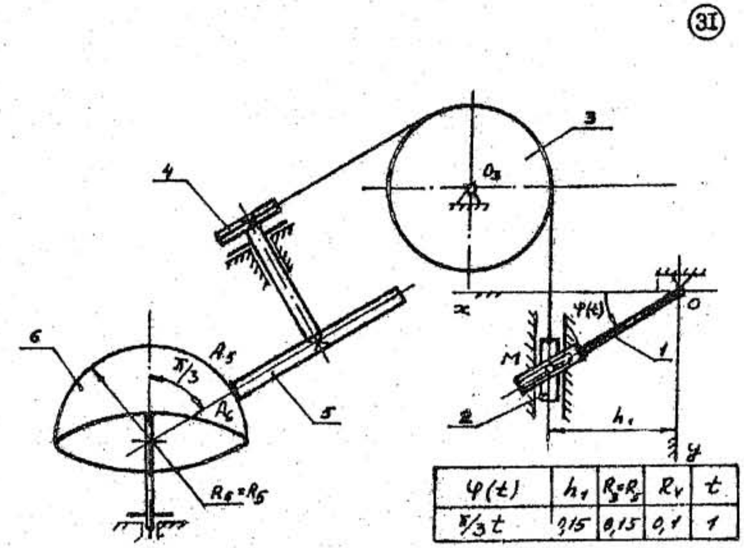
Дополн. вопр.

Найти угловую скорость и угловое ускорение звена 2.

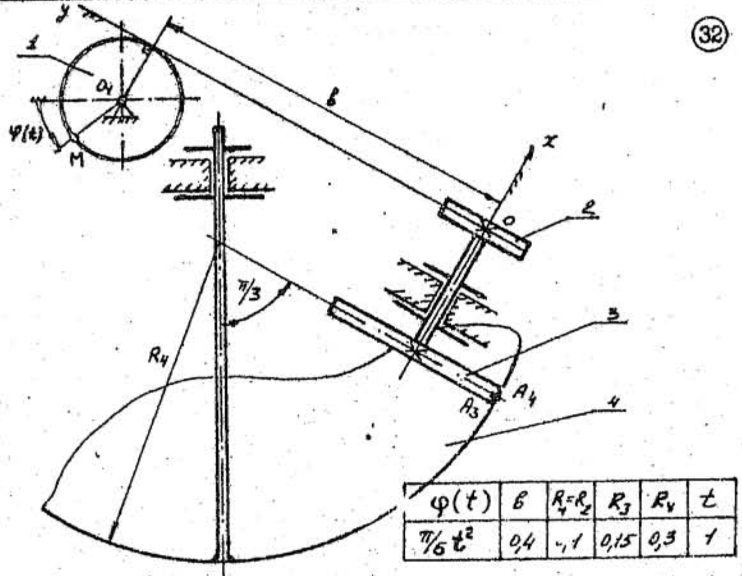
$\varphi(t)$	$r(t)$	R_1	R_2	R_4	t
t^2	$0,2t$	0,3	0,1	0,3	1



$\varphi(t)$	h_0	ℓ	r_1	R_1	R_2	t
t^2	0	0,4	0,1	0,2	0,2	1



$\varphi(t)$	h_1	$R_3 = R_5$	R_4	t
$\pi/3\, t$	0,15	0,15	0,1	1



$\varphi(t)$	b	$R_1 = R_2$	R_3	R_4	t
$\pi/6\, t^2$	0,4	0,1	0,15	0,3	1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редакция заказной литературы

Алексей Николаевич Виноградов
Надежда Николаевна Пылогина
Ольга Павловна Феоктистова

Кинематика точки и простейшие движения твердого тела

Заведующая редакцией Н.Г.Ковалевская

Редактор Г.А.Нилова

Корректор О.В.Калашникова

Подписано в печать 29.04.94. Формат 60х84/16. Бумага тип. № 2.
Печ.л. 2,5. Усл.печ.л. 2,33. Уч.-изд.л. 2,47.
Тираж 2000 экз. Изд. № 61. Заказ 363 С 451

Издательство МГТУ, типография МГТУ.
107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.