Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Методические указания

О.А. Бархатова, Г.С. Садыхов

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.Э. БАУМАНА

О.А. Бархатова, Г.С. Садыхов

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Методические указания
к выполнению типового расчета*

Под редакцией *А.В. Копаева*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2005

УДК 513.56/58
ББК 22.151.5
Б26

Рецензент *В.Ф. Панов*

Бархатова О.А., Садыхов Г.С.

Б26 Поверхности второго порядка: Методические указания к выполнению типового расчета / Под ред. А.В. Копаева. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 40 с.: ил.

ISBN 5-7038-2667-5

Рассмотрены поверхности вращения, цилиндрические поверхности, описаны типы поверхностей второго порядка и приведены их канонические уравнения. Рассмотрен порядок построения тела, ограниченного пересекающимися поверхностями. Приведены краткие теоретические сведения, решенные примеры, задачи для самостоятельного решения, условия домашнего задания.

Для студентов 1-го и 2-го курсов МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Ил. 9. Табл. 6. Библиогр. 6 назв.

УДК 513.56/58
ББК 22.151.5

ISBN 5-7038-2667-5

ВВЕДЕНИЕ

В аналитической геометрии наряду с вопросом об аналитическом представлении линии на плоскости важным является вопрос об аналитическом представлении поверхности и линии в пространстве при помощи уравнений, связывающих их координаты. Кроме того, для решения многих прикладных задач требуются построения поверхностей, тел, ограниченных поверхностями, линии пересечения тел и ее проекций на координатные плоскости.

В методичесхсих указаниях приводится понятие об уравнении поверхности и уравнении линии в пространстве. Рассмотрены поверхности вращения и цилиндрические поверхности, понятие и основные типы уравнений второго порядка. Основное внимание уделено поверхностям второго порядка. Приводится их классификация, построение поверхностей методом сечений, а также построение тела, ограниченного пересекающимися поверхностями второго порядка, и нахождение уравнения проекции линии пересечения тел на координатные плоскости.

Для самостоятельной работы приведены варианты типового расчета.

УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Будем рассматривать вещественные числа x, y, z как произвольные переменные величины в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$. Пусть $F(x, y, z)$ – некоторая заданная функция. Рассмотрим геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению вида $F(x, y, z)=0$. В общем случае это есть равенство, верное не для любых троек чисел x, y, z. Такое уравнение может определять поверхность, линию в пространстве, отдельные точки или не определять никакого геометрического образа, если не существует ни одной точки, координаты которой удовлетворяют уравнению.

Уравнением поверхности называют уравнение вида

$$F(x, y, z)=0, \tag{1}$$

которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней. Поверхность, определяемая уравнением (1), есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Уравнение поверхности (1) называют **алгебраическим**, если $F(x, y, z)$ – целый многочлен от переменных x, y, z. Все неалгебраические уравнения поверхностей называют **трансцендентными**.

Поверхность, которая определяется алгебраическим уравнением степени n, называют **алгебраической поверхностью n-го порядка**.

Общий вид алгебраического уравнения первой степени, содержащего три переменные величины: $Ax+By+Cz+D=0$, где $A^2+B^2+C^2 \neq 0$. Это уравнение алгебраической поверхности первого порядка (плоскости).

Общий вид алгебраического уравнения второй степени, содержащего три переменные величины:

$$\begin{gathered} a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+ \\ +2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0, \end{gathered} \tag{2}$$

где хотя бы один из коэффициентов a_{ij}, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,3}$, отличается от нуля, т. е. уравнение содержит члены второй степени. Уравнение (2) представляет собой уравнение или произвольно расположенной алгебраической поверхности второго порядка, или ее вырожденной формы, или мнимого геометрического объекта.

Если функция $F(x, y, z)$ в уравнении (1) есть произведение m функций

$$F_1(x,y,z),\ F_2(x,y,z),\ \dots,\ F_m(x,y,z):\ F(x,y,z)=\prod_{i=1}^{m} F_i(x,y,z),$$

то уравнение (1) распадется на совокупность m уравнений:

$$F_1(x,y,z)=0, \quad F_2(x,y,z)=0,\dots,\ F_m(x,y,z)=0.$$

Это уравнения объединения m поверхностей.

Пример 1. Определить, какие точки пространства $Oxyz$ геометрически заданы уравнением $4x^2-y^2+2yz-z^2=0$.

Решение. После преобразования к виду

$$4x^2-(y-z)^2=0, \quad (2x-y+z)(2x+y-z)=0$$

заданное уравнение второй степени распадается на два уравнения первой степени: $2x-y+z=0$ и $2x+y-z=0$. Это уравнения двух плоскостей, проходящих через начало координат.

Линия в пространстве может быть задана как пересечение двух поверхностей с уравнениями $F_1(x,y,z)=0$ и $F_2(x,y,z)=0$. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{3}$$

определяет данную линию.

Поскольку линия в пространстве может быть получена как пересечение различных пар поверхностей, то существует бесконечно много способов задания каждой линии.

При исследовании поверхностей решают две основные задачи аналитической геометрии:

1) по известному свойству множества точек поверхности выводят уравнение поверхности;

2) по известному уравнению поверхности исследовать свойства множества точек этой поверхности

Пример 2. **Сферой** называют геометрическое место точек пространства, равноудаленных от заданной точки (центра сферы). Вывести уравнение сферы по известному радиусу и координатам центра.

Решение. Выведем уравнение сферы, центр которой находится в начале координат, а радиус равен a. По определению, расстояние любой точки $M(x, y, z)$ сферической поверхности от начала координат равно a, что можно записать в виде равенства $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a$, которое после возведения в квадрат принимает вид $x^2+y^2+z^2=a^2$. Это искомое уравнение сферы.

Для исследования свойств множества точек поверхности по ее уравнению (1) удобно использовать метод сечений.

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Поверхностью вращения называют поверхность, любое сечение которой плоскостью, проходящей через точку поверхности и перпендикулярной к некоторой прямой (оси вращения), содержит окружность, проходящую через взятую точку и имеющую центр на этой прямой.

Поверхность вращения (рис. 1) образована вращением плоской кривой c вокруг прямой d (оси вращения), расположенной в ее плоскости. При этом каждая точка M кривой c описывает окружность.

Чтобы найти уравнение поверхности, образованной вращением линии, принадлежащей координатной плоскости, вокруг координатной оси этой плоскости, нужно в уравнении линии оставить без изменения переменную, соответствующую оси вращения, а другую переменную заменить квадратным корнем из суммы квадратов этой переменной и переменной, не входящей в уравнение линии.

Пусть плоская кривая $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ задана в полуплоскости $y \geq 0$. Поверхность образована вращением этой кривой вокруг оси

Ox. Чтобы составить уравнение этой поверхности, нужно в уравнении кривой x оставить без изменения, а вместо y подставить $\sqrt{y^2+x^2}$. Получаем уравнение поверхности вращения вокруг оси Ox в виде

$$F(x, \sqrt{y^2+z^2})=0.$$

Замечание. Если кривая задана для полуплоскости $y<0$, то уравнение поверхности вращения имеет вид $F(x, -\sqrt{y^2+z^2})=0$.

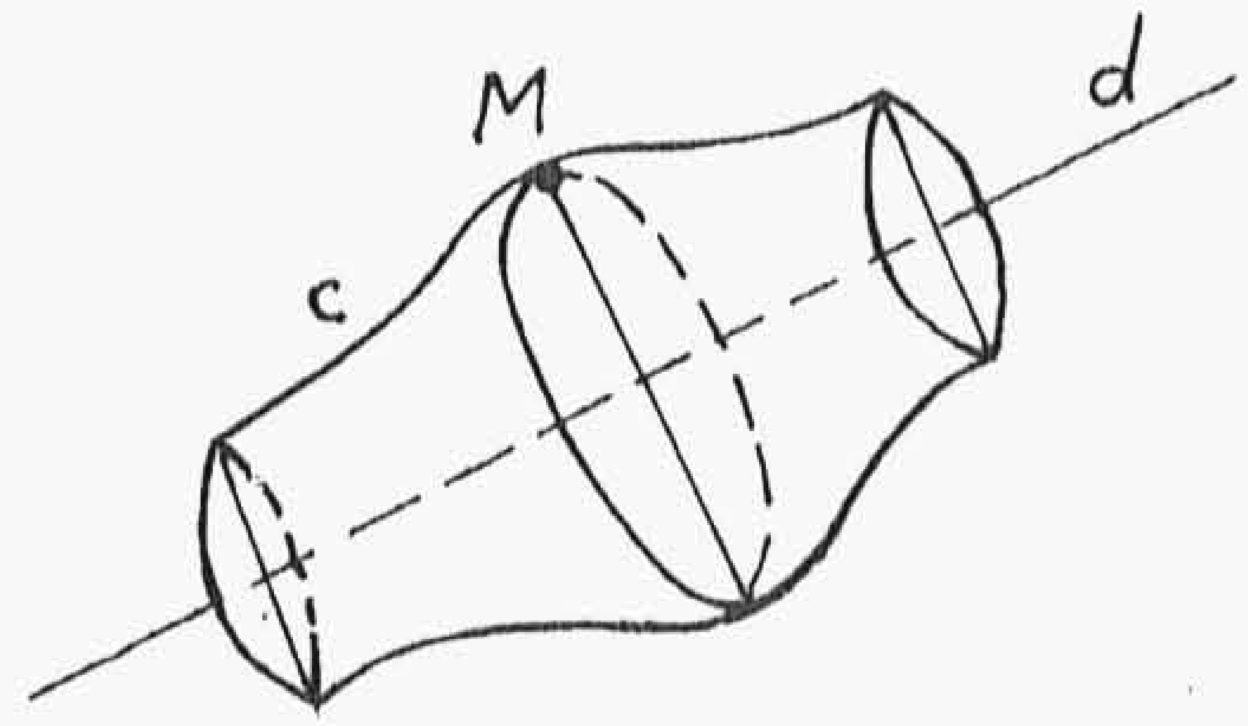


Рис. 1

Пример 3. В плоскости $Oxyz$ задана окружность $(x-b)^2+y^2=a^2$, $b>a>0$. Составить уравнение поверхности, образованной вращением этой окружности вокруг оси Oy.

Решение. В уравнении окружности y оставим без изменения, а x заменим на $\sqrt{x^2+y^2}$. Тогда уравнение поверхности вращения можно записать в виде $(\sqrt{x^2+z^2}-b^2)+y^2=a^2$. После преобразования получим $x^2+y^2+z^2+b^2-a^2=2b\sqrt{x^2+z^2}$, что эквивалентно уравнению $(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2=4b^2(x^2+z^2)$. Эту поверхность называют тором.

Пример 4. В плоскости $z=0$ задана кривая $y=\sin x$. Составить уравнение поверхности, образованной вращением этой кривой вокруг оси Ox.

Решение. В уравнении кривой оставим x без изменения, а y заменим на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$. Получим уравнение поверхности вращения $\pm\sqrt{y^2+z^2}=\sin x$, или $y^2+z^2=\sin^2 x$.

При вращении кривых второго порядка вокруг их осей симметрии образуются поверхности вращения второго порядка. Если осью вращения какой-либо поверхности является координатная ось, то в уравнение такой поверхности две переменные величины входят только в виде суммы их квадратов, а третья переменная определяет ось вращения.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Цилиндрической называют поверхность, образованную прямой (образующей), которая при перемещении в пространстве не меняет направления и пересекает определенную линию (направляющую) (рис. 2).

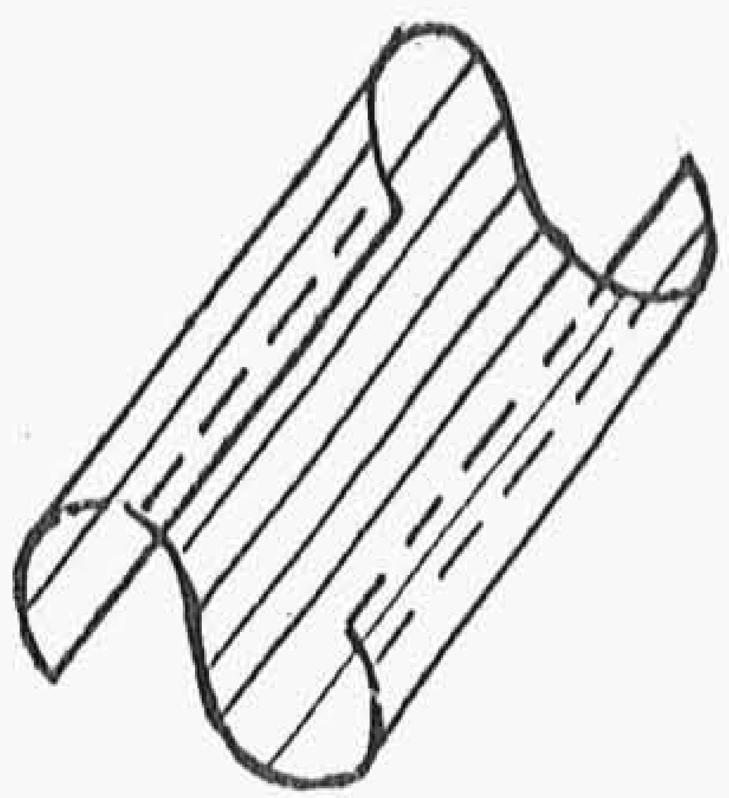


Рис. 2

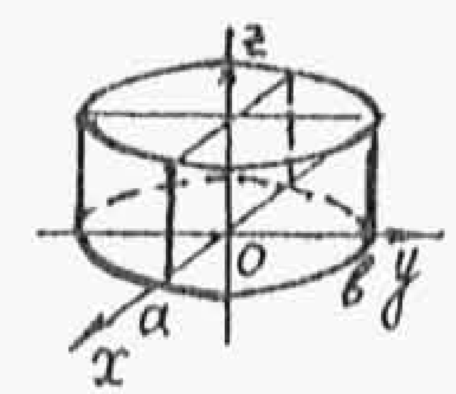
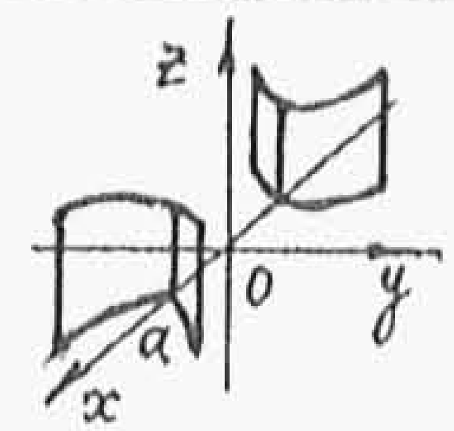
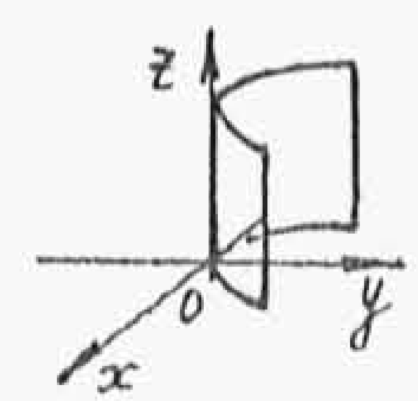
В общем случае уравнение цилиндрической поверхности может быть составлено по заданным в виде (3) уравнениям направляющей линии и направлению образующей. Если образующие цилиндрической поверхности параллельны одной из координатных осей, то уравнение такой поверхности не содержит переменную, соответствую этой оси. Уравнения направляющей могут быть заданы как уравнения линии пересечения двух поверхностей вида (3), расположенной в плоскости координат.

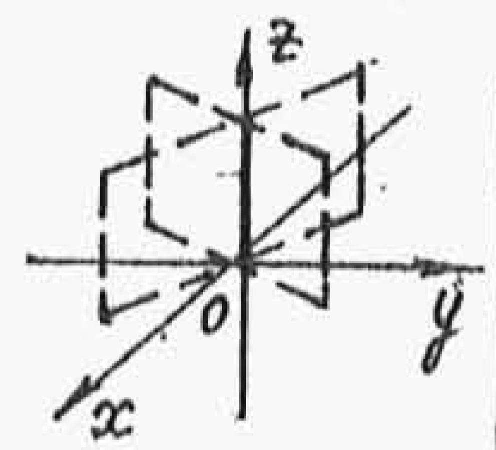
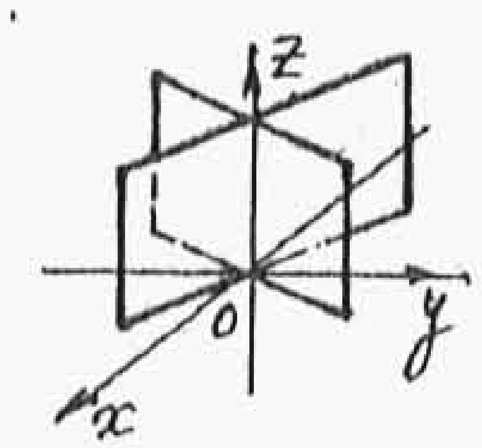
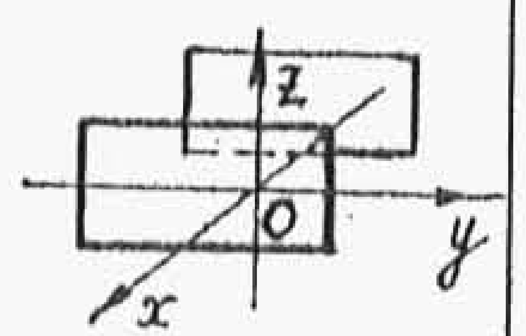
Уравнение вида $F(x,y)=0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz, и с направляющей $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$ Уравнение вида $F(x,z)=0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy, и с направляющей $\begin{cases} F(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$ Уравнение вида $F(y,z)=0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Ox, и с направляющей $\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$.

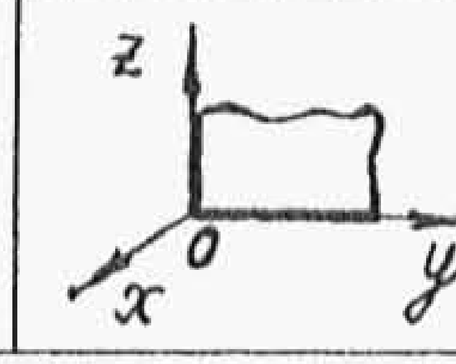
Цилиндры второго порядка – это цилиндрические поверхности, направляющими которых являются кривые второго порядка, а образующими являются прямые, перпендикулярные плоскостям, в которых расположены соответствующие кривые. Если направляющая лежит в одной из координатных плоскостей, то образующая параллельна третьей координатной оси. Название цилиндра второго порядка определяется названием соответствующей направляющей.

Основные типы цилиндров второго порядка и случаи их вырождения представлены в табл. 1.

Таблица 1

Каноническое уравнение поверхности	Положение образующей	Название и уравнения направляющей	Название Поверхности	Рисунок поверхности	Замечания
1	2	3	4	5	6
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Параллельны оси Oz	Эллипс $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=h \end{cases}$	Эллиптический цилиндр		При $a=b$ круговой цилиндр
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Параллельны оси Oz	Гипербола $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=h \end{cases}$	Гиперболический цилиндр		
$x^2=2py$	Параллельны оси Oz	Парабола $\begin{cases} x^2=2py \\ z=h \end{cases}$	Параболический цилиндр		

Каноническое уравнение поверхности	Положение образующей	Название и уравнения направляющей	Название Поверхности	Рисунок поверхности	Замечания
1	2	3	4	5	6
			Случаи вырождения		
$\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1\right.$			Мнимый эллиптический цилиндр		
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$			Две мнимые пересекающиеся плоскости		Прямая $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$			Две пересекающиеся плоскости		$y=\pm\frac{b}{a}x$
$x^2-a^2=0$			Две параллельные плоскости		$x=\pm a$
$x^2+a^2=0$			Две мнимые параллельные плоскости		

Каноническое уравнение поверхности	Положение образующей	Название и уравнения направляющей	Название Поверхности	Рисунок поверхности	Замечания
1	2	3	4	5	6
$x^2=0$			Две совпадающие плоскости		

Замечания.

1. В табл. 1 уравнения записаны в каноническом виде на примере цилиндров с образующими, параллельными оси Oz.. Для поверхностей, смещенных относительно начала координат уравнение следует привести к каноническому виду, как это делают для кривых второго порядка. Случай поворота осей координат в данном пособии не рассматривается (он будет рассмотрен при изучении темы «Квадратичные формы»).

2. Различных типов цилиндров второго порядка три (эллиптический, гиперболический и параболический), т.е. столько, сколько и кривых второго порядка. В каждом типе возможны различные сочетания знаков и переменных.

3. Для цилиндров с образующими, параллельными осям Ox и Oy, соответственно изменится состав переменных в уравнении и положение поверхности относительно осей координат.

Пример 5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $z^2-x^2=4$, и построить ее.

Решение. Заданное уравнение поверхности второго порядка не содержит одну компоненту, следовательно, это уравнение цилиндрической поверхности. Отсутствующая координата y означает, что образующая цилиндра параллельна оси Oy. Направляющая может быть определена как линия пересечения поверхности заданного цилиндра и плоскости Oxz: $\begin{cases}z^2-x^2=4,\\y=0.\end{cases}$

Кривая в сечении – гипербола, следовательно, заданная поверхность – гиперболический цилиндр. Чтобы поверхность была ограничена, строим гиперболу в плоскости $y=0$ и в плоскости $y=h$. Проводим образующие цилиндра параллельно оси Oy (рис. 3).

Пример 6. Построить поверхность по ее уравнению $y=x^3$.

Решение. В уравнении поверхности третьего порядка не содержится координата z, значит это уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси Oz. Кривая $y=x^3$ в плоскости $z=0$ является направляющей. Строим направляющую в плоскости $z=0$ и $z=h$, проводим образующие параллельно оси Oz (рис. 4).

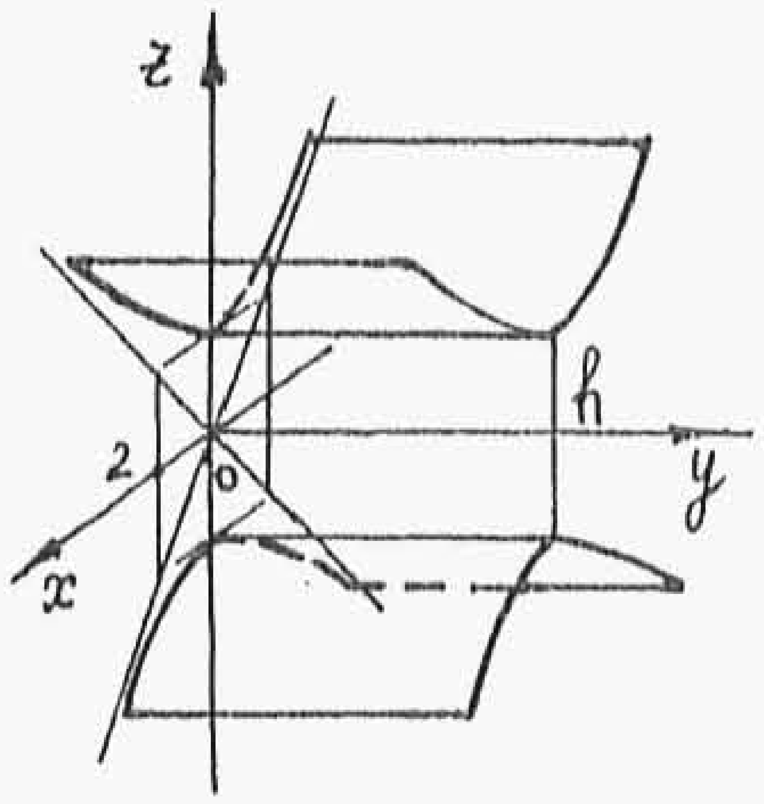


Рис. 3

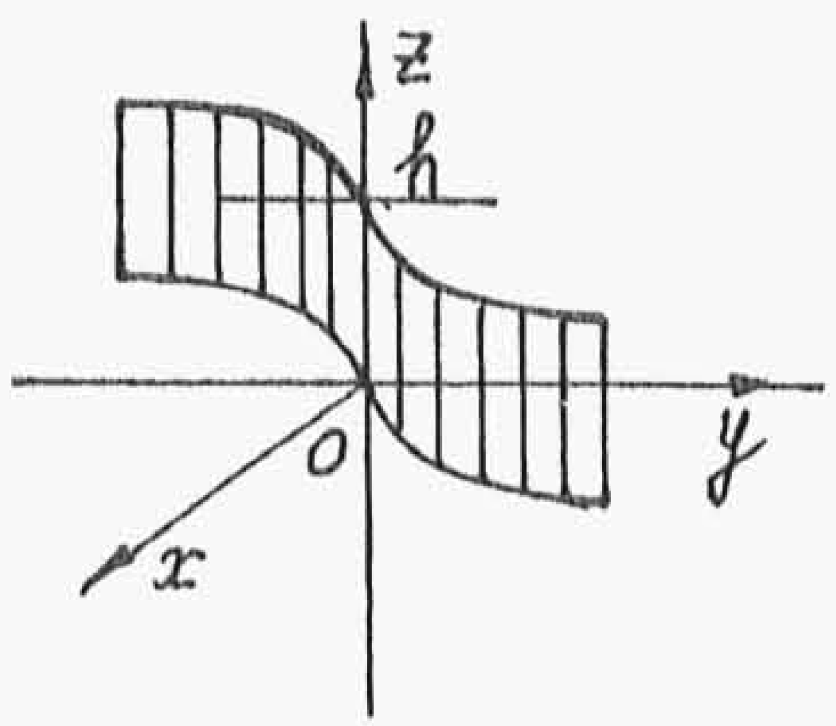


Рис. 4

Пример 7. Определить тип поверхности по ее уравнению $y^2+z^2-2y+2=0$.

Решение. Уравнение не содержит координату x, что характеризует поверхность как цилиндрическую с образующей, параллельной оси Ox. Уравнение поверхности после выделения полного квадрата принимает вид $(y-1)^2+z^2=-1$. Это уравнение мнимого кругового цилиндра. В пространстве $Oxyz$ нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяют этому уравнению.

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СЛУЧАЯ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Построение методом сечений

Исследуемую поверхность пересекают плоскостями и анализируют уравнения полученных в сечениях кривых. Для большей информативности сначала следует выбирать секущие плоскости, проходящие через центр поверхности (если он имеется). Удобно исследовать полученные в сечении кривые, если в качестве секущих плоскостей выбирать координатные плоскости (их уравнения $x=0$, $y=0$, $z=0$) и плоскости, им параллельные (их уравнения $x=h$, $y=h$, $z=h$). Тогда уравнения полученных в сечении кривых имеют вид

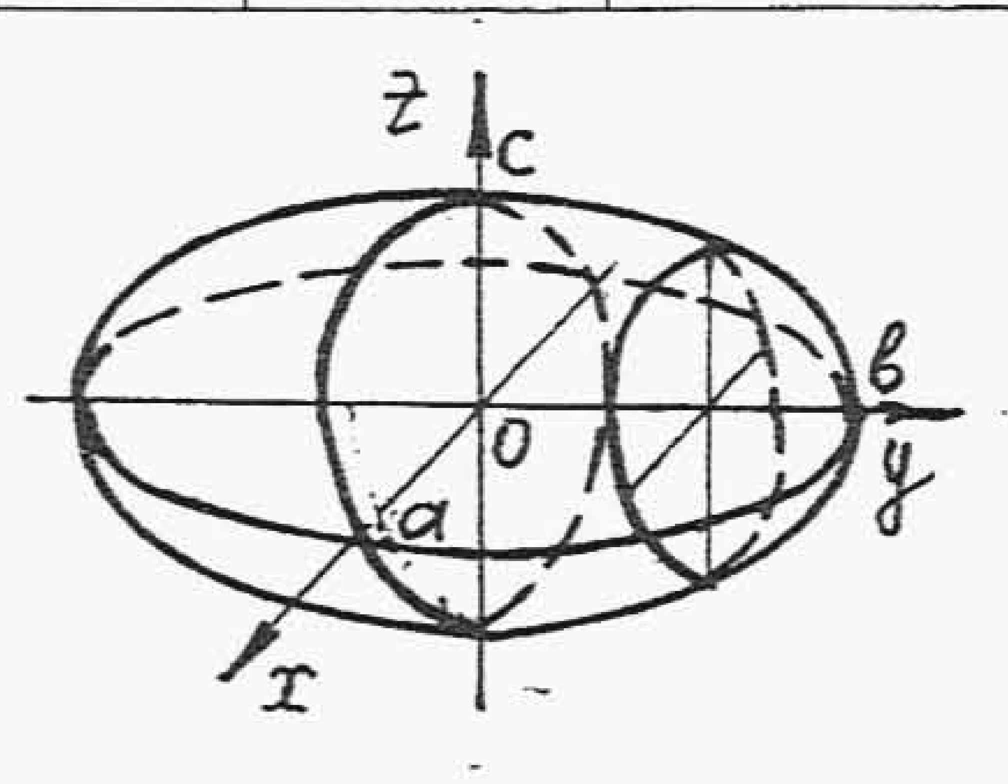
$$\begin{cases} x=h, \\ F(x,y,z)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y=h, \\ F(x,y,z)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} z=h, \\ F(x,y,z)=0. \end{cases}$$

В каждой секущей плоскости строят соответствующую кривую. Для уточнения формы поверхности или ограничения ее можно использовать большее количество сечений. Видимую часть поверхности выделяют сплошной линией, а невидимую – пунктирной.

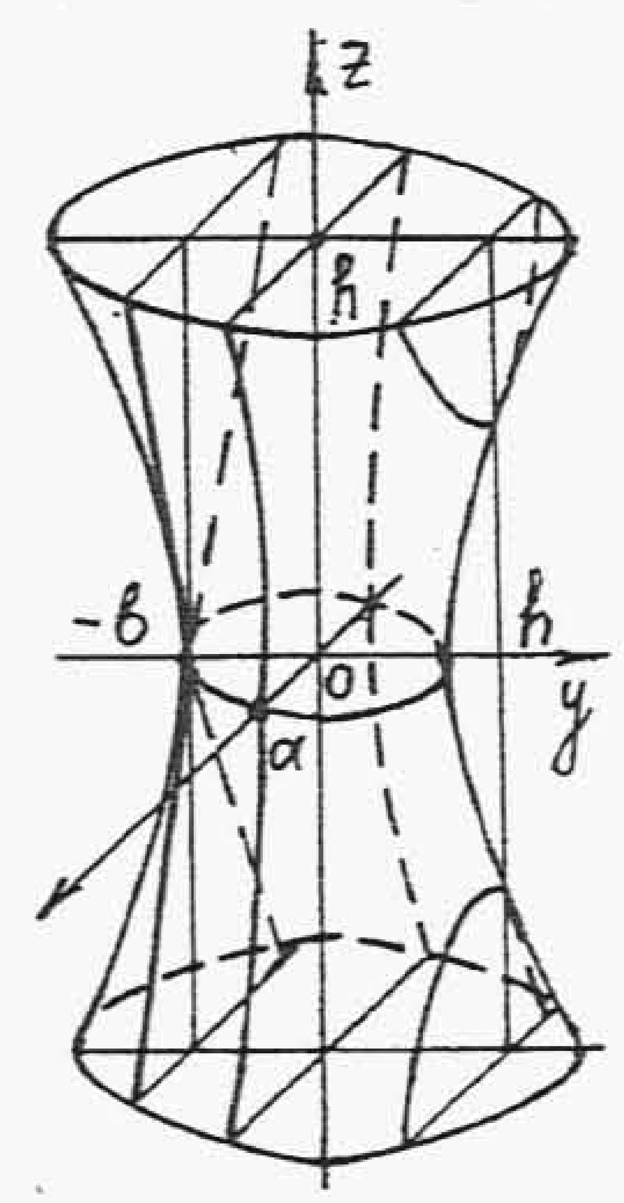
Канонические уравнения. Построение поверхностей методом сечений

Классификация поверхностей второго порядка (кроме цилиндрических) приведена в табл. 2. Построение проведено методом сечений. Название поверхности (кроме конуса) определяют две кривые с одинаковым названием, полученные при сечении поверхности координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$): два эллипса – эллипсоид, две гиперболы – гиперболоид, две параболы – параболоид. Кривая в третьем сечении дополняет название (гипербола – гиперболический, эллипс – эллиптический, окружность – круговой, или поверхность вращения).

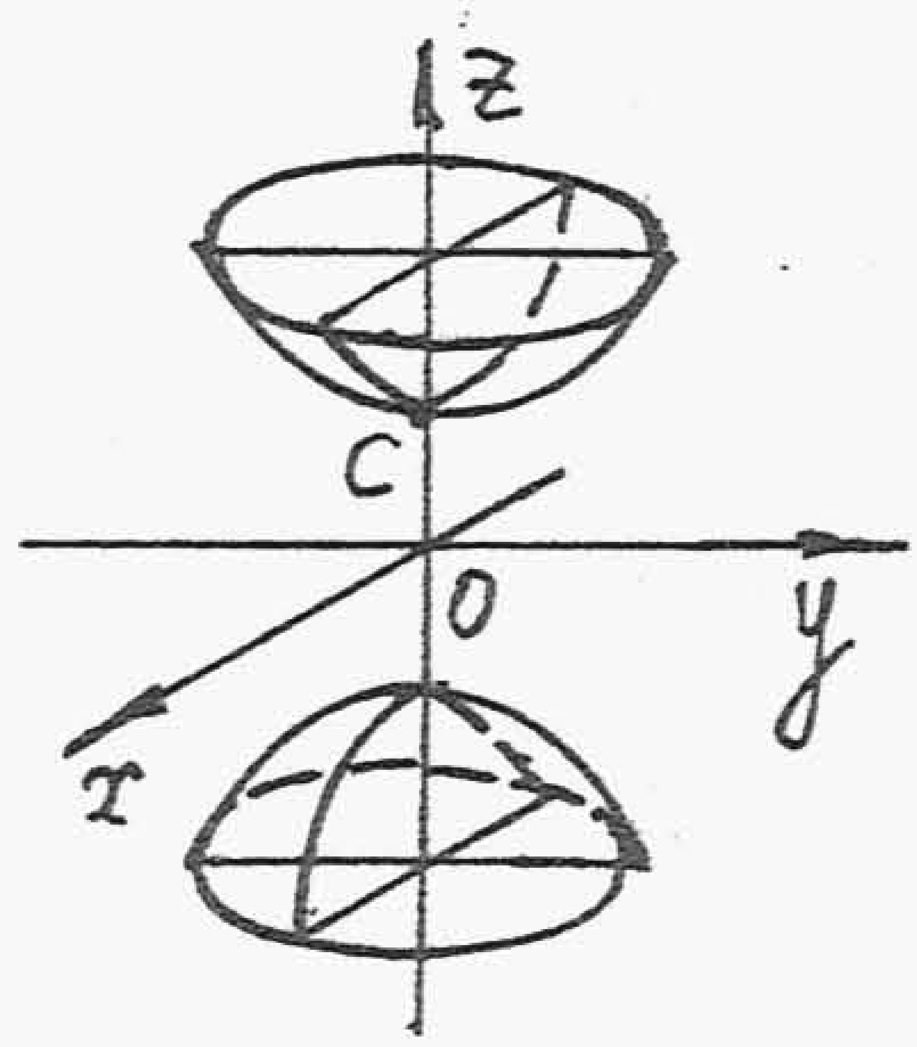
Таблица 2

Эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$					
Уравнения плоскостей сечения и кривых в сечениях			Симметрия		Замечания
$x=h$	$y=h$	$z=h$	Центр	Плоскости	
1	2	3	4	5	6
$h=0$. Эллипс: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$h=0$. Эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$h=0$. Эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Точка $O(0,0,0)$	$x=0$, $y=0$, $z=0$	Сфера при $a=b=c$. Эллипсоид вращения при $a=b$
$\|h\|<a$. Эллипс: $\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}=1$	$\|h\|<b$. Эллипс: $\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}=1$	$\|h\|<c$. Эллипс: $\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$			
$\|h\|=a$. Две точки: $(a,0,0)$; $(-a,0,0)$	$\|h\|=b$. Две точки: $(0,b,0)$; $(0,-b,0)$	$\|h\|=c$. Две точки: $(0,0,c)$; $(0,0,-c)$			
$\|h\|>a$	$\|h\|>b$	$\|h\|>c$			
Плоскость не пересекает поверхность					

Продолжение табл. 2

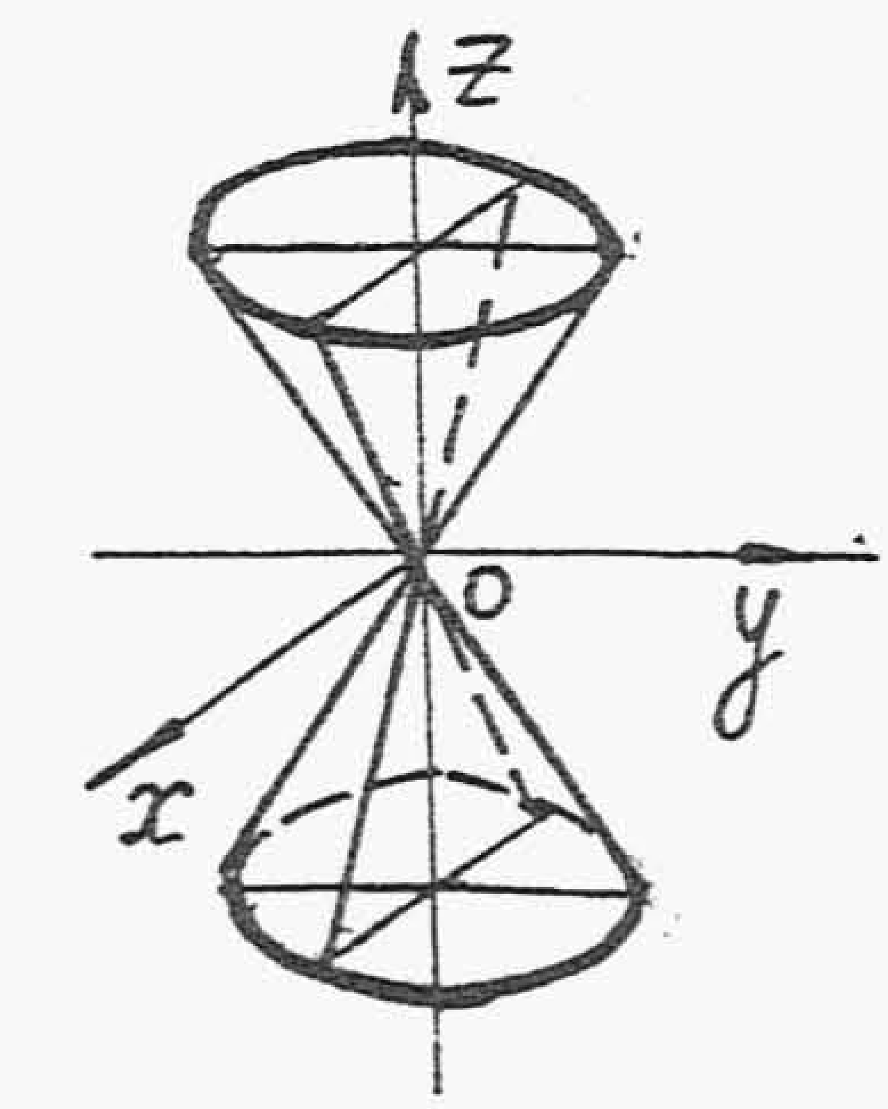
Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$					
1	2	3	4	5	6
$h=0$. Гипербола: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$h=0$. Гипербола: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$h=0$. Эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Точка $O(0,0,0)$	$x=0$, $y=0$, $z=0$	Гиперболоид вращения при $a=b$
$\|h\|<a$. Гипербола: $\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}=1$	$\|h\|<b$. Гипербола: $\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}=1$	$\|h\|>0$. Эллипс: $\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$			
$\|h\|=a$. Две прямые: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$\|h\|=b$. Две прямые: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$				
$\|h\|>a$. Гипербола: $\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}==-1$	$\|h\|>b$. Гипербола: $\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)}==-1$				

Продолжение табл. 2

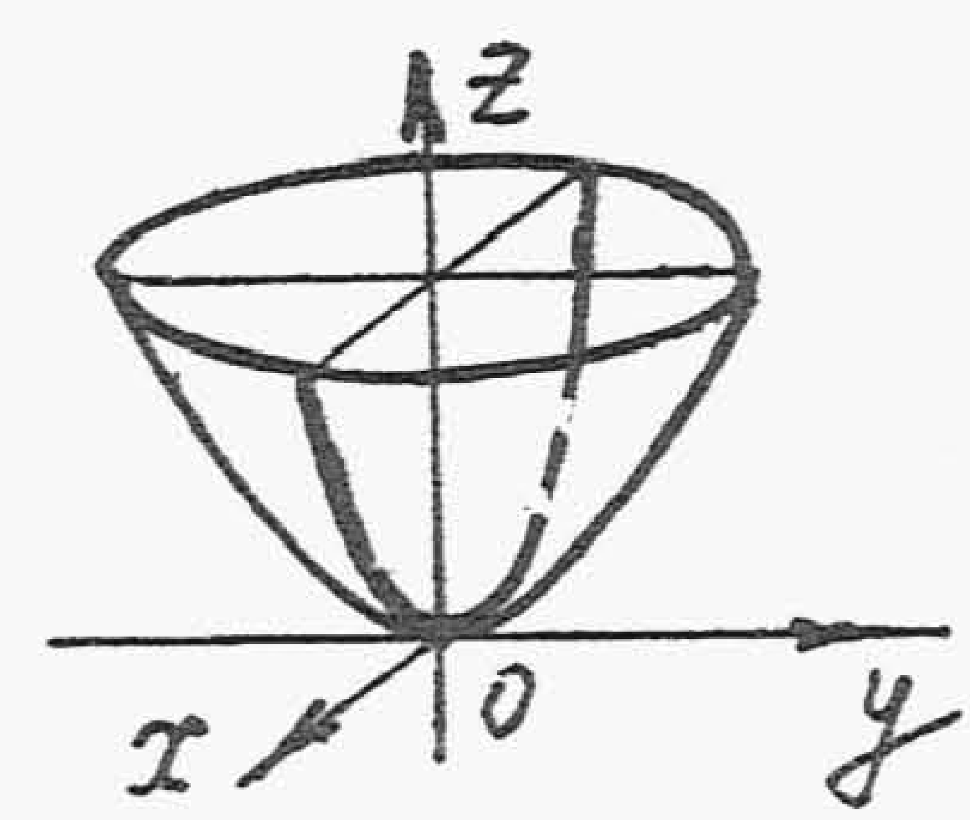
Двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$					
1	2	3	4	5	6
$h=0$. Гипербола: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$h=0$. Гипербола: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$\lvert h\rvert<c$. Плоскость не пересекает поверхность	Точка $O(0, 0, 0)$	$x=0$, $y=0$, $z=0$	Гиперболоид вращения при $a=b$
		$\lvert h\rvert=c$. Две точки: $(0, 0, c)$; $(0, 0, -c)$			
$\lvert h\rvert>0$. Гипербола: $\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right)}=-1$	$\lvert h\rvert>0$. Гипербола: $\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right)}=-1$	$\lvert h\rvert>c$. Эллипс: $\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1$			

1720208

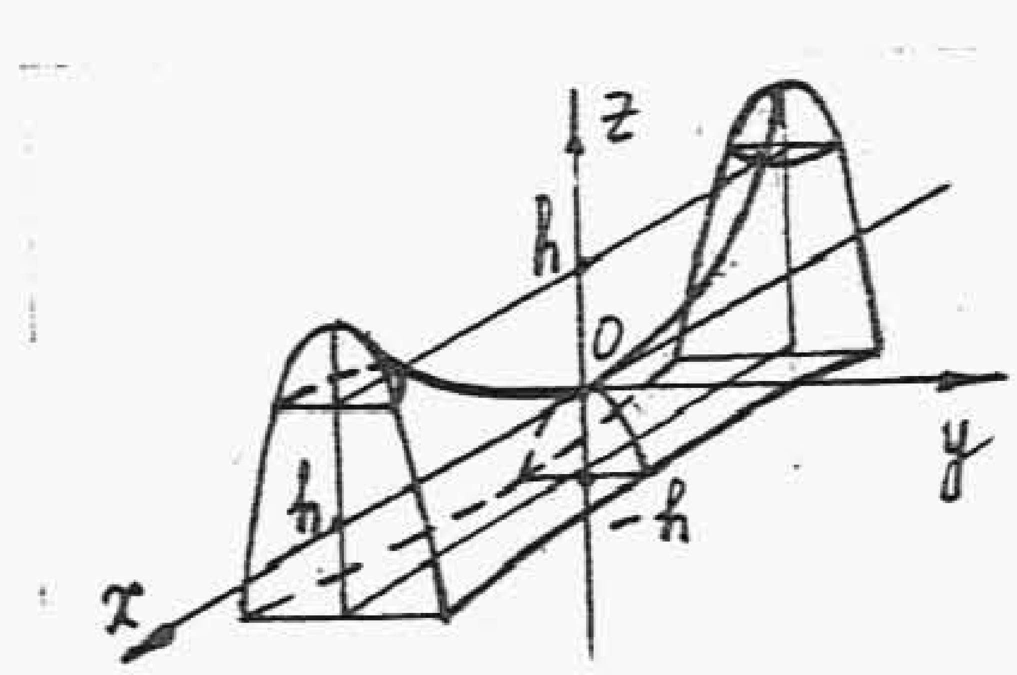
Продолжение табл. 2

Конус: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$					
1	2	3	4	5	6
$h=0$. Две прямые: $z=\pm\frac{c}{b}y$	$h=0$. Две прямые: $z=\pm\frac{c}{a}x$	$h=0$. Точка: $O(0, 0, 0)$	Точка: $O(0, 0, 0)$	$x=0$, $y=0$, $z=0$	Круговой конус при $a=b$
$\lvert h\rvert>0$. Гипербола: $\frac{y^2}{\left(\frac{bh}{a}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(\frac{ch}{a}\right)^2}=-1$	$\lvert h\rvert>0$. Гипербола: $\frac{x^2}{\left(\frac{ah}{b}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(\frac{ch}{b}\right)^2}=-1$	$\lvert h\rvert>0$. Эллипс: $\frac{x^2}{\left(\frac{ah}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{bh}{c}\right)^2}=1$			

Продолжение табл. 2

Эллиптический параболоид: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ (pq>0)$					
1	2	3	4	5	6
$h=0$. Парабола: $y^2=2pz$	$h=0$. Парабола: $x^2=2pz$	$h=0$. Точка: $O(0,0,0)$		$x=0$, $y=0$	Параболоид вращения при $a=b$
$\lvert h\rvert>0$. Парабола: $y^2=2q\left(z-\frac{h^2}{2p}\right)$	$\lvert h\rvert>0$. Парабола: $x^2=2p\left(z-\frac{h^2}{2q}\right)$	$h>0$. Эллипс: $\frac{x^2}{2hp}+\frac{y^2}{2hq}=1$ ($h<0$ не пересекает)			

Окончание табл. 2

Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ (pq>0)$					
1	2	3	4	5	6
$h=0$. Парабола: $y^2=-2pq$	$h=0$. Парабола: $x^2=2pz$	$h=0$. Две прямые: $y=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}x$		$x=0$, $y=0$	
$\lvert h\rvert>0$. Парабола: $y^2=-2q\left(z-\frac{h^2}{2p}\right)$	$\lvert h\rvert>0$. Парабола: $x^2=2p\left(z+\frac{h^2}{2q}\right)$	$h>0$. Гипербола: $\frac{x^2}{2ph}-\frac{y^2}{2qh}=1$			
		$h<0$. Гипербола: $\frac{x^2}{2p\lvert h\rvert}-\frac{y^2}{2q\lvert h\rvert}=-1$			

З а м е ч а н и е (к табл. 2). В уравнениях возможны другие сочетания знаков и переменных. При этом меняется положение поверхности относительно координатных осей.

Приведем случаи вырождения поверхностей:

1) мнимый эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1;$$

2) мнимый конус (точка O (0, 0, 0)):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Пример 8. Методом сечений построить поверхность, заданную уравнением $x-8y^2-2z^2=0$.

Решение. 1. Приводим уравнение поверхности к каноническому виду (в левой части уравнения расположены члены, содержащие переменные во второй степени, все остальные члены уравнения находятся в правой части; коэффициенты в числителе при переменных во второй степени равны единице):

$$8y^2+2z^2=x \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{1}{16}}+\frac{z^2}{\frac{1}{4}}=2x.$$

2. Записываем уравнения секущих плоскостей и уравнения кривых в сечениях:

$$\begin{cases}x=0,\\4x^2+z^2=0,\end{cases}\quad \begin{cases}y=0,\\z^2=\frac{1}{2}x,\end{cases}\quad \begin{cases}z=0,\\y^2=\frac{1}{8}x,\end{cases}\quad \begin{cases}x=h,\\\frac{y^2}{\frac{h}{8}}+\frac{z^2}{\frac{h}{2}}=1\end{cases}$$

(в сечениях получены: точка $O(0,0,0)$, парабола, парабола, эллипс). Выберем $h=2$:

$$\begin{cases}x=2,\\4y^2+z^2=1.\end{cases}$$

3) Название поверхности – эллиптический параболоид.

4) Строим поверхность. Для этого строим каждую кривую в соответствующем сечении (рис. 5).

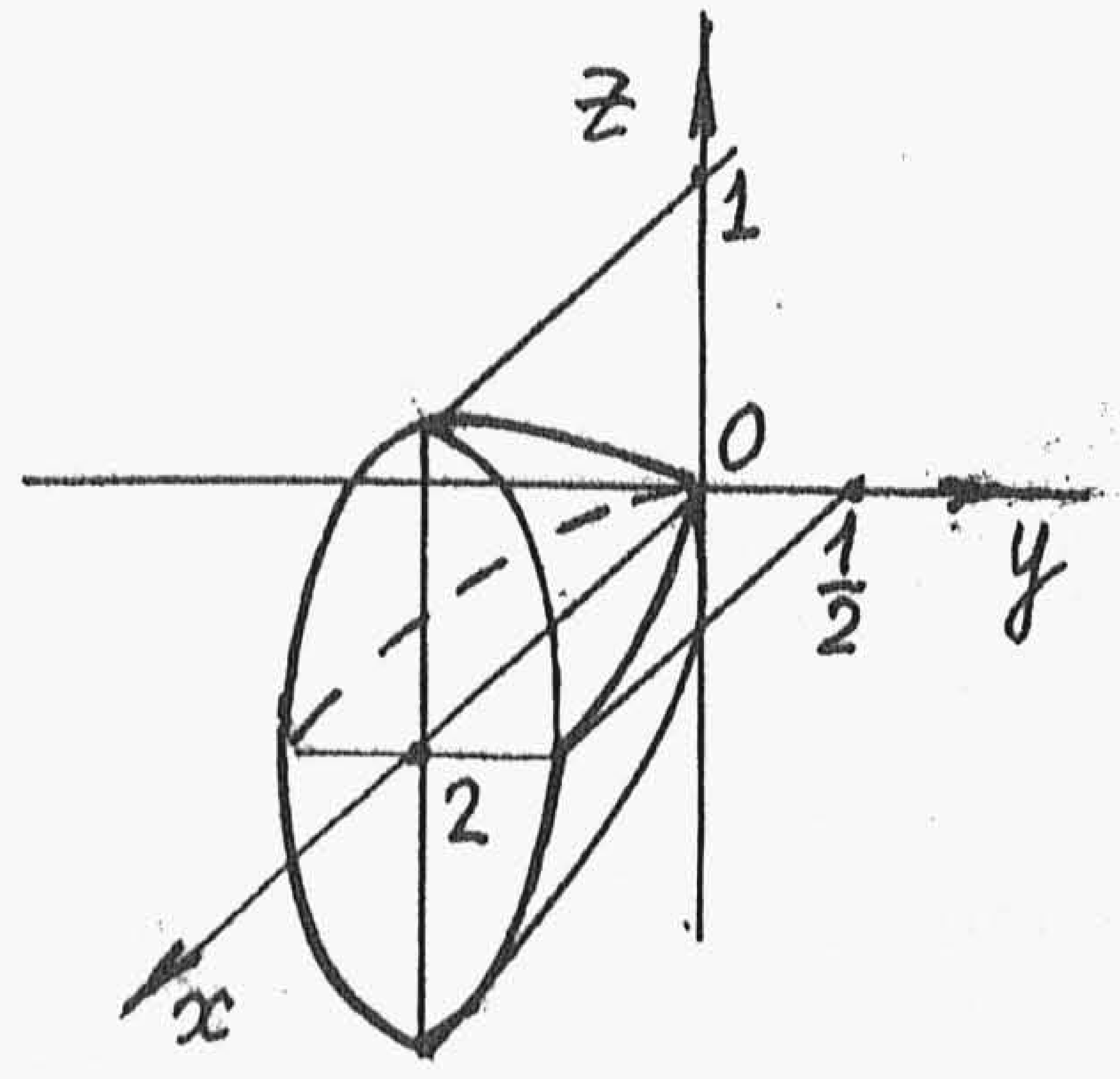


Рис. 5

Уравнения смещенных поверхностей второго порядка

Если построена поверхность, заданная уравнением $F(x,y,z)=0$, то для построения поверхности, заданной уравнением $F(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0$, достаточно исходную поверхность переместить (без поворота) в пространстве $Oxyz$ так, чтобы точка, совпадающая с началом координат, переместилась в точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$. При параллельном переносе осей координат, когда начало координат перемещается в точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, новые координаты каждой точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ связаны со старыми координатами точки $M(x,\ y,\ z)$ соотношениями $x_1=x-x_0$, $y_1=y-y_0$, $z_1=z-z_0$.

Поверхности второго порядка (а также случаи вырождения) с параллельным переносом осей координат описывают уравнением (2), исключив из него члены с произведением координат ($a_{12}=0$, $a_{13}=0$, $a_{23}=0$):

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) приводят к каноническому виду выделением полных квадратов. При построении поверхности методом сечений сначала выбирают секущие плоскости, проходящие через точку $M_0(x, y, z)$ параллельно плоскостям координат (уравнения плоскостей $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$).

З а м е ч а н и е. Общее исследование уравнений (2) и (4) в данных методических указаниях не приводится.

Пример 9. Привести уравнение поверхности $x^2+y^2-z^2-$ $-4y+8=0$ к каноническому виду. Построить поверхность методом сечений.

Решение. 1. Приводим уравнение поверхности к каноническому виду. Для этого группируем члены с одинаковыми переменными $x^2+(y^2-4y)-z^2+8=0$, $\quad x^2+(y-2)^2-z^2=-4$, $\quad \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=-1.$

Это поверхность вращения с центром, смещенным в точку $M(0, 2, 0)$.

2. Записываем уравнения секущих плоскостей и кривых в сечениях:

$$\begin{cases} x=0, \\ \dfrac{(y-2)^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=-1, \end{cases} \begin{cases} y=2, \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=-1, \end{cases} \begin{cases} z=0, \\ x^2+(y-2)^2=-4, \end{cases} \begin{cases} z=\pm h, \ (h>2), \\ x^2+(y-2)^2=h^2-4 \end{cases}$$

(гипербола, гипербола, мнимая окружность, окружность).

Пусть $h=3$:

$$\begin{cases} z=\pm 3, \\ x^2+(y-2)^2=5. \end{cases}$$

3. Название поверхности – двуполостный гиперболоид вращения.

4. Строим поверхность. Для этого строим каждую кривую в соответствующем сечении (рис. 6).

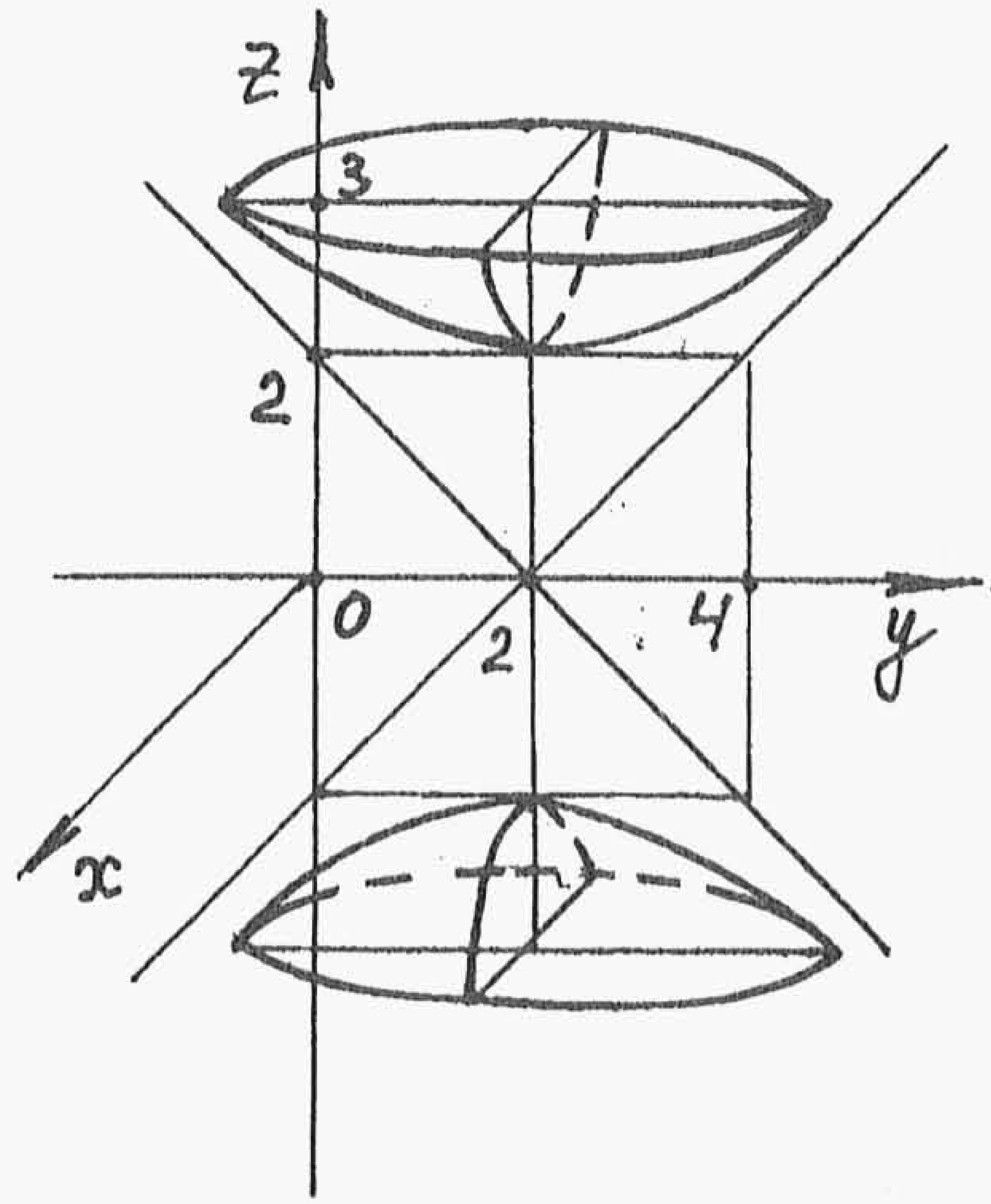


Рис. 6

Пример 10. Построить поверхность, заданную уравнением $z=3+\sqrt{4+y^2-4x^2}$.

Решение: 1. Преобразуем исходное уравнение: $z-3= =\sqrt{4+y^2-4x^2}$;

$$\begin{cases} z\geq 3, \\ (z-3)^2=(4+y^2-4x^2), \end{cases} \begin{cases} z\geq 3, \\ 4x^2-y^2+(z-3)^2=4, \end{cases} \begin{cases} z\geq 3, \\ x^2-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{(z-3)^2}{4}=1. \end{cases}$$

Это уравнение задает часть поверхности второго порядка, определенную для $z \geq 3$. Центр поверхности смещен в точку $M_0(0,\ 0,\ 3)$.

2. Записываем уравнения секущих плоскостей и кривых в сечениях:

$$\begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{(z-3)^2}{4} = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0, \\ x^2 + \dfrac{(z-3)^2}{4} = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 3, \\ x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \pm h, \\ \dfrac{x^2}{\dfrac{h^2}{4}+1} + \dfrac{(z-3)^2}{4(\dfrac{h^2}{4}+1)} = 1 \end{cases}$$

(гипербола, эллипс, гипербола, эллипс). Пусть $h = 4$:

$$\begin{cases} y = \pm 4, \\ \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{(z-3)^2}{20} = 1. \end{cases}$$

3. Название поверхности – однополостный гиперболоид.

4. Строим поверхность. Для этого строим каждую кривую в соответствующем сечении для $z \geq 3$ (рис. 7).

ТЕЛА, ОГРАНИЧЕННЫЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Проектирующий цилиндр. Проекция линии пересечения поверхностей на координатные плоскости

Линию пересечения двух поверхностей в пространстве определяет система уравнений (3). Пусть уравнение, полученное из системы (3) исключением переменной z, имеет вид

$$\Phi_1(x,\ y) = 0. \qquad (5)$$

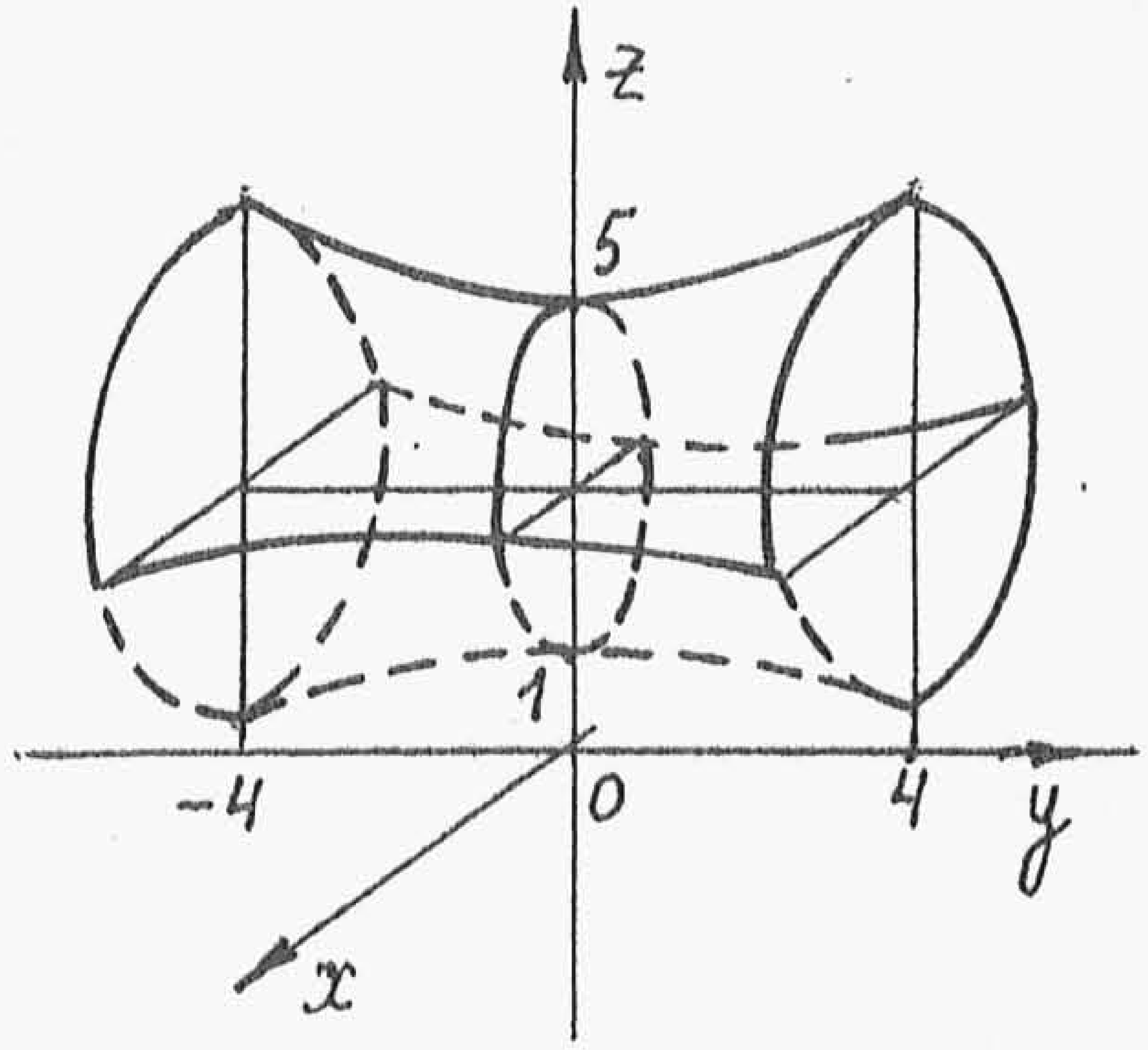


Рис. 7

Тогда, если координаты $x,\ y,\ z$ удовлетворяют обоим уравнениям системы (3), то координаты x и y удовлетворяют уравнению (5); если две координаты x и y удовлетворяют уравнению (5), то найдется такое значение третьей координаты z, при котором три координаты $x,\ y,\ z$ удовлетворяют обоим уравнениям (3).

Уравнение (5) определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz. Каждая точка линии пересечения поверхностей лежит на этой цилиндрической поверхности, а каждая образующая последней проходит через какую-нибудь точку линии. Поверхность, определяемую уравнением (5) и состоящую из прямых, проектирующих точки линии на плоскость Oxy, называют цилиндрической поверхностью, проектирующей линию пересечения двух поверхностей на плоскость, или проектирующим цилиндром. Уравнения цилиндров $\Phi_2(x,\ z) = 0$ и $\Phi_3(y,\ z) = 0$, проектирующих точки линии на плоскости Oxz и Oyz, получают из системы (3) исключением переменных y и x соответственно.

Проекция линии пересечения двух поверхностей на координатную плоскость есть линия пересечения проектирующего цилиндра и координатной плоскости. Уравнения проекции линии пересечения двух поверхностей на координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz имеют вид

$$\begin{cases}\Phi_1(x,y)=0,\\ z=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\Phi_2(x,z)=0,\\ y=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\Phi_3(y,z),\\ x=0.\end{cases}$$

Чтобы получить уравнение проекции линии пересечения двух поверхностей (3) на заданную координатную плоскость, надо из системы (3) исключить третью переменную.

Пример 11. Написать уравнения линии пересечения поверхностей $x^2+y^2-2z=0$ и $x^2+y^2=2-z$ и ее проекции на плоскость Oxy.

Решение. Приводим уравнения поверхностей к каноническому виду: $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, $x^2+y^2=-(z-2)$. Это – уравнение сферы с центром в точке $M_1(0,\ 0,\ 1)$ и параболоида с вершиной в точке $M_2(0,\ 0,\ 2)$. Линия пересечения поверхностей может быть задана системой двух уравнений поверхностей:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2z=0,\\ x^2+y^2=2-z.\end{cases}$$

Чтобы получить уравнение проектирующего цилиндра, из этой системы следует исключить z. Сначала удобнее исключить сумму x^2+y^2 (вычитая из первого уравнения второе) и определить, в какой плоскости $z=\text{const}$ расположена линия пересечения поверхностей: $z^2-2z=-2+z$; $z^2-3z+2=0$. Получаем $z_1=2$, $z_2=1$. Точка, в которой $z=2$, является вершиной параболоида. Поэтому линия пересечения поверхностей расположена в плоскости $z=1$. Уравнение проектирующего цилиндра получим, подставляя $z=1$ в любое из уравнений заданных поверхностей: $x^2+y^2=1$. Заметим, что уравнение линии пересечения заданных

поверхностей теперь можем записать по-другому – в виде системы уравнений поверхностей проектирующего цилиндра и плоскости:

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=1.\end{cases}$$

Уравнение проекции линии пересечения заданных поверхностей на плоскость Oxy запишется в виде уравнения линии пересечения проектирующего цилиндра и плоскости координат:

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=0.\end{cases}$$

В результате получено уравнение окружности с центром в начале координат, радиус равен единице.

Построение тела, ограниченного пересекающимися поверхностями

Последовательность построения:

1) привести каждое уравнение поверхности к каноническому виду;

2) построить на одном рисунке каждую поверхность методом сечений. В каждой секущей плоскости фиксировать точки пересечения кривых в сечениях. Эти точки принадлежат линии пересечения поверхностей;

3) построить схематично линию пересечения поверхностей, плавно соединяя зафиксированные точки. Для уточнения положения линии можно использовать большее количество сечений и проекции линии на плоскости координат. (Методы точного построения линий пересечения поверхностей рассматривает начертательная геометрия);

4) выделить те части поверхностей, которые ограничивают заданное тело.

Пример 12. Построить тело, ограниченное поверхностями $x^2+y^2-z^2=0$ и $x^2+y^2-2x=0$. Написать уравнения линии пересечения поверхностей и ее проекции на плоскость Oxz. Построить проекцию линии пересечения заданных поверхностей на плоскость Oxz.

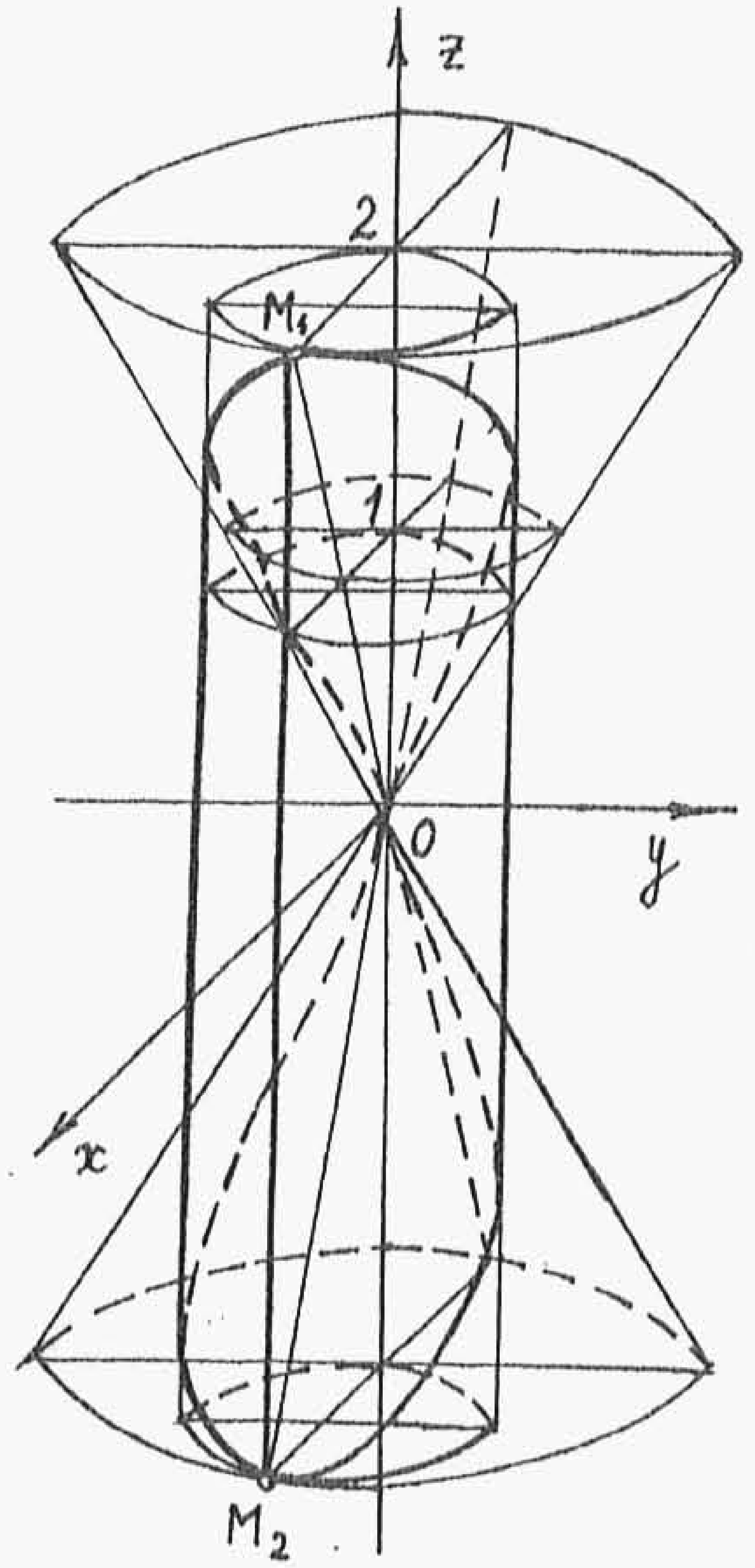


Рис. 8

Решение. 1. Уравнение первой поверхности записано в каноническом виде. Это круговой конус с центром в начале координат, Oz – ось симметрии. Приводим второе уравнение поверхности к каноническому виду: $(x-1)^2+y^2=1$. Это – прямой круговой цилиндр; образующая параллельна оси Oz; направляющая – окружность в плоскости Oxy с центром в точке $M(1,0)$, радиус равен единице.

2. Строим конус методом сечений. Сначала строим цилиндр, находим уравнения его образующих в плоскости $y=0$: $x^2-2x=0$, $x=0$ и $x=2$. Фиксируем общие точки поверхностей в плоскости $y=0$. Их три: $O(0,0,0)$, $M_1(2,0,2)$, $M_2(2,0,-2)$. Обе поверхности ограничиваем плоскостями $z=\pm2$ (при $x=2$, $z=2$).

3. Для уточнения положения линии пересечения поверхностей фиксируем дополнительно общие точки в плоскости $z=\pm1$. Строим линию пересечения поверхностей, соединяя все полученные точки плавной линией (рис. 8). Выделяем на рисунке видимые контуры тела.

4. Уравнения линии пересечения поверхностей можно задать системой уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, \\ x^2+y^2-2x=0. \end{cases}$$

5. Уравнение цилиндра, проектирующего линию пересечения на плоскость Oxz, получаем, исключая из этой системы y (вычитаем из первого уравнения второе): $z^2=2x$.

6. Уравнение проекции линии пересечения на плоскость Oxz: $\begin{cases} z^2=2x, \\ y=0. \end{cases}$ Это часть параболы, заключенная между прямыми $x=0$ и $x=2$ (рис. 9).

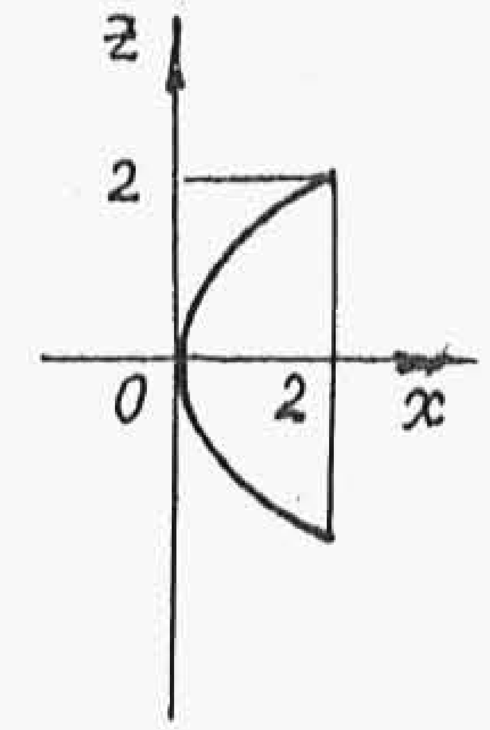


Рис. 9

Замечание. Для уточнения положения линии пересечения заданных поверхностей удобно использовать сечение $x=1$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Написать уравнение поверхности, полученной при вращении заданной кривой вокруг заданной оси. Сделать рисунок поверхности.

1) $\begin{cases} 9x^2-y^2=0, \\ z=0, \end{cases}$ вокруг оси Oy; 3) $\begin{cases} x^2-9y^2+9=0, \\ z=0, \end{cases}$ вокруг оси Ox;

2) $\begin{cases} z=x^3, \\ y=0, \end{cases}$ вокруг оси Oz; 4) $\begin{cases} y=2, \\ x=0, \end{cases}$ вокруг оси Oz.

2. Построить цилиндрическую поверхность по заданному уравнению:

1) $9x^2=y(3-y)^2$; 5) $x^2-y^2+1=0$;

2) $x^2=2z$; 6) $4y^2+z^2-4z=0$;

3) $x^2+4y=0$; 7) $x^2-y^2-4x+5=0$;

4) $2y^2+x=0$; 8) $x^2-2x-z^2+2=0$;

9) $(x^2+z^2)(x^2+z^2-2ax)-a^2z^2=0$.

Замечание. В примере 9 для построения направляющей целесообразно перейти к полярной системе координат.

3. Привести уравнение к каноническому виду. Построить поверхность методом сечений.

1) $144x^2+9y^2+z^2-144=0$;

2) $25x^2+4y^2+z^2=100$;

3) $36x^2-4y^2+9z^2-36=0$;

4) $25x^2+4y^2-z^2=100$;

5) $25x^2-y^2+4z^2+100=0$;

6) $16x^2+4y^2-2y+1=0$;

7) $16x^2-y^2+z^2=0$;

8) $x^2-25y^2-4z^2=0$;

9) $x^2-16y^2-4z^2+32y-16=0$;

10) $4y^2+z^2-4x=0$;

11) $4x^2+y^2+4z-4=0$;

12) $x^2+z^2-y-4z+3=0$;

13) $y^2-6x^2-9z=0$;

14) $y^2-z^2=x$;

15) $z^2-4x^2+8x=4$;

16) $z^2-5z+6=0$;

17) $2x^2+y^2-2y+1=0$;

18) $x^2+2y^2+z^2-10x+25=0$;

19) $2x^2+y^2+3z^2+4x-4y+7=0$;

20) $y^2-4y+4=0$;

21) $x^2+z^2-2x+6z+11=0$.

4. Заданы уравнения двух поверхностей. Построить тело, ограниченное поверхностями, и линию пересечения поверхностей. Написать уравнения линии пересечения поверхностей и уравнение ее проекции на заданную плоскость.

1) $\begin{matrix} x^2+z^2=y^2, \\ x^2+y^2+z^2-4y=0; \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2-2y=0; \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} x^2+y^2=2z, \\ y^2+2z-8=0. \end{matrix}$

УСЛОВИЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Задача 1. Написать уравнение поверхности, полученной вращением заданной кривой вокруг заданной оси (табл. 3). Сделать рисунок поверхности.

Задача 2. Построить цилиндрическую поверхность по заданному уравнению (табл. 4).

Таблица 3

Номер варианта	1		2		Номер варианта	1		2	
	Уравнения кривой	Ось вращения	Уравнения кривой	Ось вращения		Уравнения кривой	Ось вращения	Уравнения кривой	Ось вращения
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	$\begin{cases} 16y^2-4z^2=64 \\ x=0 \end{cases}$	Oz	$\begin{cases} y=e^{-z^2} \\ x=0 \end{cases}$	Oy	7	$\begin{cases} 4x^2-z^2+4=0 \\ y=0 \end{cases}$	Oz	$\begin{cases} y=2x+1 \\ z=0 \end{cases}$	Oy
2	$\begin{cases} 25x^2-4y^2=0 \\ z=0 \end{cases}$	Oy	$\begin{cases} z^2=x^3 \\ y=0 \end{cases}$	Ox	8	$\begin{cases} 9y^2+25z^2=225 \\ x=0 \end{cases}$	Oy	$\begin{cases} z=e^{-x^2} \\ y=0 \end{cases}$	Oz
3	$\begin{cases} x^2-9y^2=9 \\ z=0 \end{cases}$	Ox	$\begin{cases} z=1/y^2 \\ x=0 \end{cases}$	Oz	9	$\begin{cases} x^2-16y^2=16 \\ z=0 \end{cases}$	Ox	$\begin{cases} z=1/(1+y^2) \\ x=0 \end{cases}$	Oz
4	$\begin{cases} 4z^2+x=0 \\ y=0 \end{cases}$	Ox	$\begin{cases} z=e^{-y^2} \\ x=0 \end{cases}$	Oz	10	$\begin{cases} x^2-4y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$	Ox	$\begin{cases} z=1/x^2 \\ y=0 \end{cases}$	Oz
5	$\begin{cases} 4x^2-25y^2+100=0 \\ z=0 \end{cases}$	Ox	$\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$	Oz	11	$\begin{cases} 9x^2-4z^2=36 \\ y=0 \end{cases}$	Oz	$\begin{cases} z^2=y^3 \\ x=0 \end{cases}$	Oy
6	$\begin{cases} z^2=2y \\ x=0 \end{cases}$	Ox	$\begin{cases} z^3=x^2 \\ y=0 \end{cases}$ s	Oz	12	$\begin{cases} y^2-9z^2=9 \\ x=0 \end{cases}$	Oy	$\begin{cases} z=2^{-x^2} \\ y=0 \end{cases}$	Oz

Окончание табл. 3

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
13	$\begin{cases}4x^2-25y^2=0\\ z=0\end{cases}$	Oz	$\begin{cases}z=1/\left(1+x^2\right)\\ y=0\end{cases}$	Oz	22	$\begin{cases}9x^2-25y^2=0\\ z=0\end{cases}$	Ox	$\begin{cases}z=1/\left(1+y^2\right)\\ x=0\end{cases}$	Oy
14	$\begin{cases}16z^2-9y^2=144\\ x=0\end{cases}$	Oy	$\begin{cases}y=1/z^2\\ x=0\end{cases}$	Oy	23	$\begin{cases}4y^2+z^2=4\\ x=0\end{cases}$	Oz	$\begin{cases}z=1/y^2\\ x=0\end{cases}$	Oy
15	$\begin{cases}9y^2-4z^2=0\\ x=0\end{cases}$	Oz	$\begin{cases}z=y^2\\ x=0\end{cases}$	Oy	24	$\begin{cases}4x^2-y^2=0\\ z=0\end{cases}$	Oy	$\begin{cases}z=2^{-y^2}\\ x=0\end{cases}$	Oz
16	$\begin{cases}4y^2=x\\ z=0\end{cases}$	Ox	$\begin{cases}y^3=z^2\\ x=0\end{cases}$	Oz	25	$\begin{cases}x^2=4y\\ z=0\end{cases}$	Oy	$\begin{cases}y=3x+1\\ z=0\end{cases}$	Ox
17	$\begin{cases}16y^2+4z^2=64\\ x=0\end{cases}$	Oz	$\begin{cases}z^3=y^2\\ x=0\end{cases}$	Oy	26	$\begin{cases}9x^2+y^2=9\\ z=0\end{cases}$	Oy	$\begin{cases}z=4y\\ x=0\end{cases}$	Oz
18	$\begin{cases}z=y^2\\ x=0\end{cases}$	Oz	$\begin{cases}y=3x\\ z=0\end{cases}$	Ox	27	$\begin{cases}9y^2-z^2=0\\ x=0\end{cases}$	Oz	$\begin{cases}z=2\\ x=0\end{cases}$	Oy
19	$\begin{cases}9y^2-z^2=0\\ x=0\end{cases}$	Oz	$\begin{cases}\left(y^2+z^2\right)^2=4\left(y^2-z^2\right)\\ x=0\end{cases}$	Oy	28	$\begin{cases}x^2-9z^2=9\\ y=0\end{cases}$	Ox	$\begin{cases}z=9x\\ y=0\end{cases}$	Oz
20	$\begin{cases}x^2+z=0\\ y=0\end{cases}$	Oz	$\begin{cases}z^3=x^2\\ y=0\end{cases}$	Ox	29	$\begin{cases}x^2+16y^2=16\\ z=0\end{cases}$	Ox	$\begin{cases}z=3^{-y^2}\\ x=0\end{cases}$	Oz
21	$\begin{cases}4y^2-z^2=16\\ x=0\end{cases}$	Oz	$\begin{cases}z=3\\ y=0\end{cases}$	Ox	30	$\begin{cases}4y^2-z^2=4\\ x=0\end{cases}$	Oz	$\begin{cases}y=\cos x\\ z=0\end{cases}$	Ox

Номер варианта	Уравнение поверхности	Номер варианта	Уравнение поверхности
1	$\left(x^2+y^2\right)^2=y^2-x^2$	16	$\left(x^2+y^2-2y\right)^2=4\left(x^2+y^2\right)$
2	$\left(x^2+y^2-3x\right)^2=9\left(x^2+y^2\right)$	17	$\left(x^2+y^2\right)^2=16\left(x^2-y^2\right)$
3	$\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x^2-y^2\right)$	18	$\left(x^2+y^2-x\right)^2=\left(x^2+y^2\right)$
4	$\left(x^2+y^2+y\right)^2=x^2+y^2$	19	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$
5	$\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-4x\right)-4y^2=0$	20	$\left(x^2+z^2\right)^2=4\left(x^2-z^2\right)$
6	$\left(x^2+z^2\right)^3=4x^2z^2$	21	$\left(x^2+y^2\right)^3=4x^2y^2$
7	$\left(y^2+z^2\right)^2=y^2-z^2$	22	$\left(x^2+y^2-x\right)^2=4\left(x^2+y^2\right)$
8	$\left(x^2+y^2\right)^2=9\left(y^2-x^2\right)$	23	$\left(y^2+z^2-2y\right)^2=4\left(y^2+z^2\right)$
9	$\left(x^2+y^2+x\right)^2=x^2+y^2$	24	$\left(y^2+z^2\right)^2=25\left(y^2-z^2\right)$
10	$\left(x^2+y^2\right)^2=9\left(x^2-y^2\right)$	25	$\left(x^2+z^2\right)^2=9\left(z^2-x^2\right)$
11	$\left(x^2+y^2\right)^3=16x^2y^2$	26	$\left(x^2+y^2\right)^2=25\left(x^2-y^2\right)$
12	$\left(x^2+y^2-x\right)^2=x^2+y^2$	27	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=9^{\frac{2}{3}}$
13	$\left(x^2+y^2-2x\right)^2=x^2+y^2$	28	$\left(x^2+y^2\right)^3=25x^2y^2$
14	$\left(x^2+y^2\right)^3=36x^2y^2$	29	$\left(x^2+y^2-4x\right)^2=25\left(x^2+y^2\right)$
15	$\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-2x\right)=y^2$	30	$\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$

Задача 3. Привести каждое уравнение поверхности к каноническому виду и построить поверхность методом сечений (табл. 5).

Задача 4. Заданы уравнения двух поверхностей. Построить обе поверхности и линию их пересечения. Написать уравнения линии пересечения поверхностей и уравнение ее проекции на заданную плоскость (табл. 6). Построить проекцию линии пересечения заданных поверхностей на заданную плоскость.

Таблица 5

Номер варианта	Уравнение поверхности				
	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
1	$9x^2-y^2+4z^2-1=0$	$x=\frac{4}{3}\sqrt{9y^2+z^2}$	$xy-2x-y+3=0$	$2x^2+y^2+6y+9=0$	$6x^2-y^2+9z+18=0$
2	$x^2-9y^2-9z=0$	$y=\sqrt{z^2-4x^2+4}$	$9x^2-4y^2+9z^2+$ $+16y-54z+101=0$	$x^2+2xy+y^2-$ $-x-y=0$	$4x^2-y^2-8x+8=0$
3	$36x^2-4y^2+9z^2-$ $-36=0$	$z=3+\sqrt{9-x^2-y}$	$36x^2+9y^2-4z^2+$ $+36y+36=0$	$x^2+y^2+z^2-4x+$ $+2y+5=0$	x^2-9y^2+36y- $-9z-36=0$
4	$4x^2-36y^2-9z^2-$ $-36=0$	$y+2\sqrt{x^2+z^2}=0$	$36x^2+y^2+4z^2+$ $+6y-8z+9=0$	$x^2+4y^2=0$	$9x^2-y^2+4z-8=0$
5	$x^2-9y^2-4z=0$	$z+\sqrt{x^2+y^2}=0$	$16x^2+4y^2+z^2-$ $-24y-4z+24=0$	$4x^2-z^2=0$	$16x^2-4y^2+z^2-$ $-32x+32=0$
6	$4x^2-9y^2-36z^2-$ $-36=0$	$z=\sqrt{4x^2+y^2-4}$	$9x^2+4y^2+z^2-$ $-8y+3=0$	$2y^2+3z^2-4y+$ $+2=0$	$4x^2-y^2+4z-4=0$
7	$4x^2-y^2+4z=0$	$x=3\sqrt{y^2+9}$	$36x^2+4y^2+z^2+$ $+32y+28=0$	$x^2+y^2+z^2-2y-$ $-4z+5=0$	$x^2-16y^2-9z^2+$ $+18z-9=0$
8	$9x^2-4y^2-z^2=0$	$z=\sqrt{4x^2+y^2+1}$	$36x^2+9y^2-4z^2-$ $-54y+45=0$	$y^2-x^2=0$	$4x^2-y^2-4z+4=0$
9	$4x^2-y^2+z^2-4=0$	$z=\sqrt{x^2+y^2}$	x^2+z^2-y- $-4z+7=0$	$z^2-4z+3=0$	$x^2-6y^2-9z-9=0$

Продолжение табл. 5

1	2	3	4	5	6
10	$36x^2+9y^2-4z^2-$ $-36=0$	$y=-1-\sqrt{1-x^2-z^2}$	$x^2-y^2+4z^2-2y-$ $-8z+3=0$	$2x^2+y^2+z^2+$ $+4x+2=0$	$9x^2-z^2-4y+$ $+2z-1=0$
11	$25x^2+y^2+4z^2-$ $-1=0$	$y=\sqrt{z-x^2}$	$2x^2+y^2-z^2-6y+$ $+2z+8=0$	$2x^2+z^2+4x+2=0$	$9x^2-z^2-4y+8=0$
12	$9x^2+4y^2-4z^2-$ $-36=0$	$y=\sqrt{z^2-x^2}$	$4y^2+z^2+16y-2z-$ $-x+17=0$	x^2+y^2-2x- $-2y+2=0$	$6x^2-y^2+9z-9=0$
13	$9x^2-y^2+4z=0$	$z=\sqrt{4x^2+4y^2-1}$	$4y^2+z^2+4x-$ $-24y+36=0$	$x^2+3xz-7x=0$	$xz-2x+1=0$
14	$4x^2-z^2+4y=0$	$z=3\sqrt{x^2+\frac{1}{4}y^2+1}$	$9x^2+4z^2-x-$ $-8z+4=0$	$3z^2+3xz+2yz-$ $-6z=0$	$xy-3x-4=0$
15	$144x^2+9y^2+4z^2-$ $-144=0$	$z=\sqrt{4-4x^2+y^2}$	$16x^2+4y^2-z^2+$ $+16y-8z+16=0$	$x^2+y^2+z^2-$ $-4y+4=0$	x^2-6y^2+24y- $-9z-24=0$
16	$25x^2+25y^2-$ $-16z^2-100=0$	$z=2\sqrt{\frac{1}{3}y^2-x^2-1}$	$225x^2+36y^2+$ $+100z^2-600z=0$	x^2+z^2-2x- $-4z+5=0$	$9x^2-y^2-4y+$ $+4z-4=0$
17	$x^2-4y^2-4z=0$	$y=3\sqrt{1-x^2}$	$36x^2-4y^2+9z^2-$ $-36z=0$	$x^2-z^2-2x+1=0$	$4x^2+y^2-4y-$ $-z+3=0$
18	$4x^2+100y^2+$ $+25z^2-400=0$	$2z=\sqrt{y^2-x^2}$	$x^2+2y^2-z^2+2x-$ $-4y+2z+1=0$	$x^2+y^2+z^2-2x-$ $-6y+4z+14=0$	$x^2-6y^2-9z-9=0$
19	$4x^2-y^2+9z^2-1=0$	$z=3-\sqrt{9-x^2-y^2}$	$16x^2+4y^2-z^2-$ $-16y+8z+16=0$	$y^2+2xy-2y=0$	$4y^2+z^2-x+8y-$ $-4z+8=0$

Окончание табл. 5

1	2	3	4	5	6
20	$4x^2+y^2-z^2+4=0$	$2x=\sqrt{4+y^2-z^2}$	$y^2+z+1=0$	$z^2-9y^2=0$	$9x^2-z^2+4y+$ $+2z-1=0$
21	$x^2-25y^2-4z^2=0$	$y=3+\sqrt{9-x^2-z^2}$	$x^2-y^2+z^2-4y+$ $+2z+5=0$	$x^2-y^2-x+y=0$	$4x^2-z^2+4y-4=0$
22	$36x^2-4y^2+9z^2-$ $-144=0$	$y=\frac{1}{3}\sqrt{4z^2-16x^2-1}$	$16x^2+4y^2+z^2+$ $+12z+20=0$	$x^2+4y^2+2z^2+$ $+16y+20=0$	$4x^2-y^2-8x+$ $+4z+4=0$
23	$x^2-6y^2=9z$	$y=\frac{1}{5}\sqrt{9z^2-225x^2+225}$	$16x^2-4y^2+z^2-$ $-64x+60=0$	$x^2-y^2+4y-4=0$	$4x^2+z^2+y-2=0$
24	$9x^2-z^2+4y=0$	$z=\frac{1}{2}\sqrt{2y-9x^2-y^2}$	$16x^2-4y^2+z^2-$ $-2z-3=0$	$4x^2+z^2-16x+$ $+20=0$	x^2-4y^2-8y- $-20=0$
25	$x^2-4y^2-4z=0$	$y=-\sqrt{z^2-9x^2+9}$	$4x^2-9y^2+4z^2+$ $+16x-54z+101=0$	$4x^2+4xy+y^2-$ $-2x-y=0$	$4x^2-y^2-8x+5=0$
26	$25x^2-4y^2+16z=0$	$z+\sqrt{9x^2+9y^2-1}=0$	$36x^2-4y^2+9z^2+$ $+36z=0$	$xz+2z^2-5z=0$	$4x^2-y^2+4y+z^2+$ $+2z-3=0$
27	$9x^2+4y^2-z^2-1=0$	$2z=\sqrt{x^2-4y^2-4}$	$16x^2-y^2+4z-8=0$	$z^2+yz-2y^2=0$	$x^2+2x-z+1=0$
28	$x^2-16y^2-4z=0$	$y-\sqrt{9-36x^2-9z^2}=0$	$16x^2+4y^2-z^2-$ $-24y-8z+4=0$	$xz-2x-z+2=0$	$9x^2+3y^2+6x-$ $-3z+1=0$
29	$16x^2-y^2+4z=0$	$2y=-\sqrt{16-16x^2+z^2}$	$16x^2+4y^2-z^2-$ $-16y-8z=0$	$z^2+5zy=0$	$36x^2-4y^2+9z^2-$ $-72x+72=0$
30	$9x^2-25y^2-225=0$	$2z+\sqrt{16-16x^2+y^2}=0$	$x^2+y^2-4x-6y-$ $-z+13=0$	$4x^2+4y^2+4z^2+$ $+4x+1=0$	$16x^2-z^2+4y+$ $2z-1=0$

Таблица 6

Номер варианта	Уравнения поверхностей	Плос-кость	Номер вариантаа	Уравнения поверхностей	Плос-кость
1	$x^2+z^2-y+1=0,\quad y-2z=1$	Oxz	16	$x^2-y^2+z^2=0,\quad 2x=y^2$	Oxz
2	$x^2+y^2+z^2=6,\quad z=x^2+y^2$	Oxy	17	$x^2+y^2-z^2=0,\quad x^2+y^2-2z^2+1=0$	Oxy
3	$z=2x^2+y^2,\quad z=8-y^2$	Oxy	18	$x^2+y^2+z^2=3,\quad y=\sqrt{x^2+z^2+1}$	Oxz
4	$x^2+z^2=1,\quad x^2+2y^2-z^2=1$	Oxy	19	$z=x^2,\quad y^2+z-1=0$	Oxy
5	$z=x^2+2y^2,\quad z=8-x^2$	Oxy	20	$x^2+y^2+z^2-2z=0,\quad x^2-y^2+z^2=0$	Oxz
6	$x^2+y^2=z^2,\quad z^2=2y$	Oxy	21	$x^2+y^2=2z,\quad y^2+2z=16$	Oxy
7	$2y=x^2+z^2,\quad x^2-y^2+z^2=1$	Oxz	22	$x^2+y^2=z,\quad x^2+z=8$	Oxy
8	$x^2+z^2=2y,\quad x^2+2y-16=0$	Oxz	23	$x^2+y^2=4x,\quad x^2+y^2=z^2$	Oxz
9	$y^2+x^2-2y=0,\quad x^2+y^2+z^2=4$	Oyz	24	$x^2+y^2=z,\quad 2x^2+2y^2-z^2=1$	Oxy
10	$z=5-x^2-y^2,\quad z=5-4x$	Oxy	25	$x^2+y^2=z^2,\quad z^2=2x$	Oxy
11	$(y-2)^2+z^2=1,\quad x^2-y^2+z^2+1=0$	Oxy	26	$z=x^2+2y^2,\quad z=8-y^2$	Oxy
12	$z=4-x^2,\quad y+z=4$	Oxy	27	$x^2+y^2+z^2=6,\quad y=x^2+z^2$	Oxz
13	$x^2+y^2+z^2=3,\quad z=\sqrt{x^2+y^2+1}$	Oxy	28	$x^2-y^2+z^2=0,\quad 4x=y^2$	Oxz
14	$x^2+(y-1)^2+z^2=1,\quad z^2-x^2-y^2=0$	Oxy	29	$x^2+y^2=4z,\quad y^2+4z=16$	Oxy
15	$x^2+y^2=2z,\quad x^2+2z-16=0$	Oxy	30	$x^2+y^2+z^2-4z=0,\quad x^2-y^2+z^2=0$	Oxz

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1988. 232 с.

2. *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 1972. 272 с.

3. *Постников М.М.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1986. 414 с.

4. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. 698 с.

5. *Канатников А.И., Крищенко А.П.* Аналитическая геометрия. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 392 с.

6. *Бархатова О.А., Садыхов Г.С.* Поверхности второго порядка. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 36 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Ольга Алексеевна Бархатова
Гулам Садыхович Садыхов

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Методические указания

Редактор *С.А. Серебрякова*
Корректор *Л.И. Малютина*
Компьютерная верстка *А.Ю. Ураловой*

Подписано в печать 15.02.2005. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печ. л. 2,5. Усл.печ. л. 2,33. Уч.-изд. л. 2,25. Тираж 1500 экз.
Изд. № 16. Заказ 71

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.