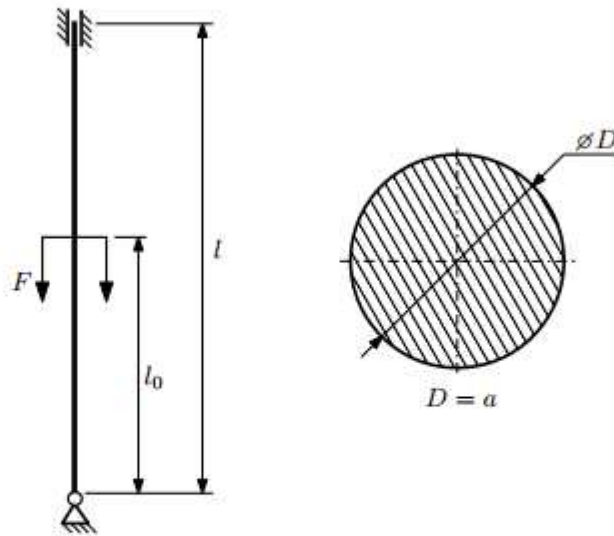


Домашнее задание №8. Вариант 13.
Устойчивость сжатых стержней
Задача №8.1

Срок выполнения: 12–15 недели.

Регистрационный код dloczbelzshetjk



1. Энергетическим методом или путем интегрирования дифференциального уравнения изгиба определить коэффициент приведения длины стойки постоянного поперечного сечения;
2. Определить размер поперечного сечения a с помощью коэффициентов понижения φ .

Параметры задачи: $F = 200 \text{ кН}$, $l = 3 \text{ м}$, $l_0 = \frac{7}{10}l$, допустимое напряжение на сжатие $[\sigma_{сж}] = 140 \text{ МПа}$, материал стойки: сталь 3.

Таблица коэффициентов понижения φ в зависимости от гибкости λ для материала сталь 3:

| λ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| φ | 0,99 | 0,96 | 0,94 | 0,92 | 0,89 | 0,86 | 0,81 | 0,75 | 0,69 | 0,60 | 0,52 | 0,45 | 0,40 | 0,36 | 0,32 | 0,29 |

Используем энергетический метод

Запишем граничные условия для данной стойки

$$z_0 = 0, V = 0 \text{ (перемещение в шарнире)}$$

$$z_0 = 0, V'' = 0 \text{ (момент в шарнире)}$$

$$z = l, V = 0 \text{ (перемещение в направляющей)}$$

$$z = l, V' = 0 \text{ (угол поворота в направляющей)}$$

Линейное перемещение точек стержня выражается функцией

$$V = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$$

Дифференцируем это выражение дважды

$$V' = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3$$

$$V'' = 2a_2 + 6a_3 z + 12a_4 z^2$$

Из начальных условий

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ 2a_2 = 0 \\ a_0 + a_1l + a_2l^2 + a_3l^3 + a_4l^4 = 0 \\ a_1 + 2a_2l + 3a_3l^2 + 4a_4l^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_1l + a_3l^3 + a_4l^4 = 0 \\ a_1 + 3a_3l^2 + 4a_4l^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \\ -3a_3l^2 - 4a_4l^3 + a_3l^2 + a_4l^3 = 0 \\ a_1 = -3a_3l^2 - 4a_4l^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -\frac{3}{2}a_4l \\ a_1 = -3a_3l^2 - 4a_4l^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -\frac{3}{2}a_4l \\ a_1 = \frac{1}{2}a_4l^3 \end{cases}$$

Следовательно:

$$V = \frac{1}{2}a_4l^3z - \frac{3}{2}a_4lz^3 + a_4z^4$$

$$V' = \frac{1}{2}a_4l^3 - \frac{9}{2}a_4lz^2 + 4a_4z^3$$

$$V'' = -9a_4lz + 12a_4z^2$$

Рассчитаем внутреннюю потенциальную энергию

$$v = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_{\min} (V'')^2 dz$$

$$v = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_{\min} (-9a_4lz + 12a_4z^2)^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_{\min} (81a_4^2l^2z^2 - 216a_4^2lz^3 + 144a_4^2z^4) dz =$$

$$= \frac{EJ_{\min}}{2} (27a_4^2l^2z^3 - 54a_4^2lz^4 + 28,8a_4^2z^5) \Big|_0^l = 0,9EJ_{\min}a_4^2l^5$$

Рассчитаем перемещение точки приложения силы

$$\lambda = \int_0^l \frac{(V')^2}{2} dz = \int_0^l \frac{\left(\frac{1}{2}a_4l^3 - \frac{9}{2}a_4lz^2 + 4a_4z^3\right)^2}{2} dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l (0,25a_4^2l^6 - 4,5a_4^2l^4z^2 + 4a_4^2l^3z^3 + 20,25a_4^2l^2z^4 - 36a_4^2lz^5 + 16a_4^2z^6) dz =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{0,25}{7}a_4^2l^7 - 1,5a_4^2l^4z^3 + a_4^2l^3z^4 + \frac{20,25}{5}a_4^2l^2z^5 - 6a_4^2lz^6 + \frac{16}{7}a_4^2z^7 \right) \Big|_0^l = 3,181 \cdot 10^{-2} a_4^2l^7$$

Рассчитаем критическую силу

$$F_{кр} = \frac{v}{\lambda} = 28,289 \frac{EJ_{\min}}{l^2}$$

Поскольку

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}$$

Коэффициент приведения длины

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi^2}{28,289}} = 0,591$$

Определение сечения

$$J_{\min} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2}{4}}} = \frac{d}{4}$$

*Первое приближение**Коэффициент понижения*

$$\varphi_0 = 0,8$$

Площадь сечения

$$A = \frac{F}{\varphi_0 \sigma_{сж}} = 1786 \text{ мм}^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 47,683 \text{ мм (диаметр сечения)}$$

Радиус инерции

$$i_{\min} = \frac{d}{4} = 11,921 \text{ мм}$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = 148,733$$

$$\varphi_1 = 0,32 + (0,36 - 0,32) \frac{148,733 - 140}{10} = 0,355$$

$$F = \varphi_1 \sigma_{сж} A = 88,733 \text{ кН} < 200 \text{ кН}$$

Второе приближение

$$\varphi_2 = \frac{0,8 + 0,355}{2} = 0,578$$

$$A = \frac{F}{\varphi_0 \sigma_{сж}} = 2474 \text{ мм}^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 56,122 \text{ мм}$$

$$i_{\min} = \frac{d}{4} = 14,03 \text{ мм}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = 126,368$$

$$\varphi_1 = 0,4 + (0,45 - 0,4) \frac{126,368 - 120}{10} = 0,432$$

$$F = \varphi_1 \sigma_{сж} A = 149,556 \text{ кН} < 200 \text{ кН}$$

Третье приближение

$$\varphi_2 = \frac{0,578 + 0,432}{2} = 0,505$$

$$A = \frac{F}{\varphi_0 \sigma_{сж}} = 2829 \text{ мм}^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 60,015 \text{ мм}$$

$$i_{\min} = \frac{d}{4} = 15,004 \text{ мм}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = 118,17$$

$$\varphi_1 = 0,4 + (0,45 - 0,4) \frac{118,17 - 110}{10} = 0,507$$

$$F = \varphi_1 \sigma_{сж} A = 200,868 \text{ кН} > 200 \text{ кН}$$

Принимаем $d=60 \text{ мм}$

Определяем перегруженность стойки

$$\Delta\% = \left| \frac{200 - 200,868}{200} \right| \cdot 100\% = 0,434\% < 5\%$$